



UNIVERSITÀ DEL SALENTO
FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Angela Albanese

Antonio Leaci

Diego Pallara

**Appunti del corso di
Analisi Matematica II**

ANNO ACCADEMICO 2010-2011

PREFAZIONE

Nel presente fascicolo abbiamo raccolto le nozioni di Analisi Matematica presentate nel corso di Analisi Matematica II del secondo anno di Ingegneria dell'Informazione.

Il poco tempo destinato dai nuovi ordinamenti all'insegnamento della materia non permette alcun approfondimento, ed anzi obbliga ad escludere dai programmi argomenti tradizionalmente ritenuti indispensabili. Sono comunque inseriti alcuni argomenti solitamente trattati in un terzo corso di Analisi Matematica, riguardanti l'Analisi Complessa e le trasformate di Fourier e di Laplace.

Riteniamo però imprescindibile, pur con tale riduzione dei contenuti, conservare intatti l'impianto concettuale e l'impostazione metodologica dell'Analisi, e riteniamo che questo obiettivo sia conseguibile solo dando enunciati sintetici e precisi, e rifuggendo da espressioni vaghe o poco chiare. Per semplificare un enunciato si può rinunciare alla massima generalità possibile, ma non al rigore della presentazione. Per questa ragione abbiamo ritenuto opportuno, e, speriamo, utile agli studenti, raccogliere in poche pagine le definizioni ed i risultati principali che vengono esposti durante le lezioni. Lo stile degli appunti è volutamente scarno ed avaro di commenti e divagazioni, che restano affidati all'esposizione orale in aula; suggeriamo agli studenti, pertanto, di limitarsi ad appuntare, durante le lezioni, solo le parti meno formali delle lezioni stesse, affidandosi a questa dispensa per gli enunciati che richiedono maggior rigore.

È per altro evidente che questi appunti non hanno la pretesa di sostituire il libro di testo, che resta indispensabile per acquisire una conoscenza dignitosa della materia. La loro funzione è piuttosto, come già detto, quella di sostituire gli appunti di lezione, troppo poco affidabili per tanti motivi, e di indicare il bagaglio *minimo* di conoscenze richieste per affrontare l'esame.

Osserviamo inoltre l'esistenza di alcuni riferimenti ad argomenti di Analisi Matematica I per cui rimandiamo alle relative dispense.

Infine, ringraziamo il collega Raffaele Vitolo per averci fornito il file di stile LATEX usato per la compilazione delle dispense, e dichiariamo in anticipo la nostra gratitudine a tutti i lettori che ci segnaleranno ogni osservazione utile a migliorare il testo.

INDICE

1	Limiti e continuità in più variabili	5
1.1	Topologia di \mathbb{R}^n	5
1.2	Successioni	10
1.3	Limiti e continuità delle funzioni	12
1.4	Funzioni vettoriali di una variabile	16
2	Calcolo differenziale in più variabili	18
2.1	Derivate parziali e differenziabilità	18
2.1.a	La formula di Taylor	27
2.2	Forme quadratiche ed estremi relativi	28
2.3	Funzioni vettoriali	32
2.4	Estremi vincolati	36
3	Curve ed integrali di linea	39
3.1	Curve regolari	39
3.2	Integrali di linea	46
3.3	Campi vettoriali conservativi	48
4	Equazioni differenziali	58
4.1	Introduzione ed esempi	58
4.2	Teoremi di esistenza	60
4.3	Equazioni lineari	66
4.3.a	Risultati generali	66
4.3.b	Equazioni di ordine 1	69
4.3.c	Metodo di Lagrange o della variazione dei parametri	70
4.3.d	Equazioni a coefficienti costanti	72
4.3.e	Soluzione dell'equazione completa in casi particolari	74
4.4	Altre equazioni integrabili elementarmente	76
4.4.a	Equazioni a variabili separabili	76
4.4.b	Equazioni omogenee	78
4.4.c	Equazioni di Bernoulli	80
4.4.d	Equazioni differenziali non lineari del 2° ordine	81

5	Integrali multipli	85
5.1	La misura di Lebesgue in \mathbb{R}^n	85
5.2	Funzioni misurabili e loro integrazione	89
5.3	Spazi $L^p(E)$	93
5.4	Spazi di Hilbert e prodotto scalare in $L^2(E)$	97
5.5	Calcolo degli integrali multipli	99
5.5.a	Formule di riduzione ed insiemi normali	99
5.5.b	Cambiamento di variabili negli integrali multipli	103
5.5.c	Integrali per funzioni e insiemi illimitati	106
5.6	Passaggio al limite sotto il segno d'integrale	110
5.7	Integrali dipendenti da parametri	114
5.8	Superficie regolari ed integrali di superficie	116
5.9	Teorema della divergenza e formula di Stokes	121
6	Analisi Complessa	126
6.1	Successioni in \mathbb{C} , limiti e continuità di funzioni complesse	126
6.2	Funzioni olomorfe	129
6.3	Serie di potenze in campo complesso	134
6.3.a	Le funzioni elementari	135
6.4	Cammini ed integrali curvilinei	137
6.5	Funzioni analitiche e funzioni olomorfe	140
6.6	Zeri di una funzione olomorfa	146
6.7	Serie di Laurent in una corona e singolarità	147
6.8	Il Teorema dei residui	152
6.9	I Teoremi di Jordan	154
6.10	Applicazioni al calcolo di integrali	155
7	Trasformata di Fourier	168
7.1	La Trasformata di Fourier in $L^1(\mathbb{R}^n)$	168
7.2	La Trasformata di Fourier in $L^2(\mathbb{R}^n)$	172
7.3	Esempi ed applicazioni	173
8	Trasformata di Laplace	179
8.1	Proprietà generali	179
8.2	Inversione della trasformata di Laplace	184
8.3	Applicazioni alla risoluzione di problemi differenziali	186
8.4	Esempi ed applicazioni	186
	Appendice	190
	Bibliografia	192

CAPITOLO 1

LIMITI E CONTINUITÀ IN PIÙ VARIABILI

In questo capitolo iniziamo lo studio delle funzioni dipendenti da più variabili reali, cioè definite in (sottoinsiemi di) \mathbb{R}^n , dove al solito $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ (n volte), e discutiamo brevemente le principali proprietà delle funzioni di una variabile a valori in \mathbb{R}^n , che approfondiremo nel Capitolo 3. Indicheremo con $x = (x_1, \dots, x_n)$ il punto generico di \mathbb{R}^n , di coordinate x_1, \dots, x_n . Nel caso di \mathbb{R}^2 o \mathbb{R}^3 useremo anche le notazioni (x, y) o (x, y, z) . Com'è noto, \mathbb{R}^n è uno spazio vettoriale reale di dimensione n , che supporremo sempre munito della *base canonica* (e_1, \dots, e_n) , dove la j -esima coordinata di e_i ha coordinate δ_{ij} . Indicheremo con p_i la proiezione sull'asse x_i , cioè la funzione lineare con dominio \mathbb{R}^n ed a valori in \mathbb{R} che associa ad ogni elemento di \mathbb{R}^n la sua i -esima coordinata. Ovviamente, dopo lo studio delle funzioni di *una sola* variabile reale, cercheremo di ricondurre quelle di *più* variabili ad esse considerando restrizioni a rette (il caso più frequente sarà quello degli assi coordinati). Avvertiamo subito però che questo non darà informazioni complete (un primo esempio si trova nell'Osservazione 1.3.4), ed uno studio ulteriore, con altri strumenti, sarà necessario.

1.1 Topologia di \mathbb{R}^n

In questo paragrafo estendiamo al caso di \mathbb{R}^n le nozioni di intorno, aperto, chiuso, ecc., che si sono già viste in \mathbb{R} . In questo caso, la discussione è più articolata perché, mentre in \mathbb{R} abbiamo considerato solo intervalli o unioni di intervalli, ora dobbiamo considerare insiemi di forma geometrica a priori arbitraria.

Su \mathbb{R}^n pensiamo sempre definito il *prodotto scalare euclideo* $x \cdot y = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$, e la *norma euclidea* indotta $\|x\| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$. La norma, come sempre, induce una *distanza* tra i punti di \mathbb{R}^n : per ogni coppia x, y poniamo $d(x, y) = \|x - y\|$. Ricordiamo le seguenti proprietà della norma (analoghe alle proprietà già viste per il valore assoluto), valide per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$:

1. $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$,

$$3. \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Da queste seguono le analoghe proprietà della distanza, valide per ogni $x, y, z \in \mathbb{R}^n$:

1. $d(x, y) \geq 0$, $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
2. $d(x, y) = d(y, x)$,
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (disuguaglianza triangolare).

Queste proprietà possono essere usate per dare una definizione generale di distanza su un insieme qualunque e sono state segnalate per completezza. In questo corso non seguiremo questa strada, ma faremo sempre ricorso direttamente alla norma.

Definizione 1.1.1 (Intorni sferici) Sia $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e sia $r > 0$. Si dice intorno sferico aperto, o anche palla aperta di centro x_0 e raggio r l'insieme così definito

$$B_r(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x_0 - x\| < r\}.$$

L'insieme $\bar{B}_r(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x_0 - x\| \leq r\}$ è detto intorno sferico chiuso, o anche palla chiusa, di centro x_0 e raggio r . Si dice sfera di centro x_0 e raggio r l'insieme così definito

$$S_r(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x_0 - x\| = r\}.$$

Notiamo che $\bar{B}_r(x_0) = B_r(x_0) \cup S_r(x_0)$.

Esempio 1.1.2 Sia $n = 1$; per $x_0 \in \mathbb{R}$ e $r > 0$, l'intorno sferico aperto di x_0 e raggio r è l'intervallo $]x_0 - r, x_0 + r[$ già introdotto nella definizione di intorno di $x_0 \in \mathbb{R}$. Per $n = 2$ e $x_0 \in \mathbb{R}^2$, $r > 0$ l'intorno sferico aperto di x_0 e raggio r è il cerchio di centro x_0 e raggio r , esclusi i punti della circonferenza con lo stesso centro e lo stesso raggio.

In generale, si dice che $I \subset \mathbb{R}^n$ è un *intorno* di x_0 se esiste $r > 0$ tale che $B_r(x_0) \subset I$.

Osservazione 1.1.3 Notiamo che per ogni coppia di punti $x, y \in \mathbb{R}^n$ con $x \neq y$ esiste $r > 0$ tale che $B_r(x) \cap B_r(y) = \emptyset$ (basta scegliere $r < \|x - y\|/2$).

Definizione 1.1.4 (Punti interni, esterni, di frontiera) Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Si dice che x_0 è un punto interno ad A se esiste $r > 0$ tale che $B_r(x_0) \subset A$. Invece, si dice che x_0 è un punto esterno ad A se x_0 è un punto interno al complementare di A , che indichiamo con A^c . Infine, x_0 si dice punto di frontiera di A se x_0 non è né un punto interno né un punto esterno ad A .

L'insieme dei punti interni ad A è indicato con $\overset{\circ}{A}$; l'insieme dei punti di frontiera di A è indicato con ∂A . Ovviamente, $\partial A = \partial A^c$.

Osservazione 1.1.5 Notiamo che se x_0 è un punto interno ad A , allora $x_0 \in A$, mentre se x_0 è un punto esterno ad A , allora $x_0 \in A^c$. Invece, se x_0 è un punto di frontiera di A , allora x_0 può appartenere indifferentemente ad A oppure ad A^c .

Esempi 1.1.6

- (i) Se A è un intervallo di \mathbb{R} di estremi a e b , allora $\overset{\circ}{A} =]a, b[$ e $\partial A = \{a, b\}$, indipendentemente dal fatto che a e b appartengano o no ad A .
- (ii) Sia $A = \mathbb{R}^n$; allora $\overset{\circ}{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n$ e $\partial \mathbb{R}^n = \emptyset$.
- (iii) Sia $A = \mathbb{Q}$; allora $\overset{\circ}{\mathbb{Q}} = \emptyset$ e $\partial \mathbb{Q} = \mathbb{R}$.
- (iv) Sia $A = B_r(x_0)$ l'intorno sferico di x_0 e raggio r , allora $\overset{\circ}{B_r}(x_0) = B_r(x_0)$ e $\partial B_r(x_0) = S_r(x_0)$. In particolare, $\overset{\circ}{S_r}(x_0) = \emptyset$.

Definizione 1.1.7 (Punti di accumulazione e punti isolati) Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Si dice che x_0 è un punto di accumulazione di A se, per ogni $r > 0$, $A \cap B_r(x_0) \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$. L'insieme dei punti di accumulazione di un insieme A si chiama derivato di A e si indica con $\mathcal{D}(A)$.

Si dice che x_0 è un punto isolato di A se esiste $r > 0$ tale che $A \cap B_r(x_0) = \{x_0\}$.

Osservazione 1.1.8 Se x_0 è un punto di accumulazione di A , allora x_0 può appartenere indifferentemente ad A o ad A^c ; invece, se x_0 è un punto isolato di A , si ha necessariamente $x_0 \in A$.

Se x_0 è un punto interno ad A , allora x_0 è anche un punto di accumulazione di A . Ma non vale il viceversa. Infatti a è un punto di accumulazione di $]a, b[$, ma non è interno ad $]a, b[$.

Esempi 1.1.9

1. Se $A = \mathbb{Q}$, allora $\mathcal{D}(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$ e \mathbb{Q} non ha alcun punto isolato.
2. Se $A = \mathbb{N}$, allora $\mathcal{D}(\mathbb{N}) = \emptyset$ e tutti gli elementi di \mathbb{N} sono punti isolati di \mathbb{N} .
3. Se $A = B_r(x_0)$ è l'intorno sferico aperto di x_0 e raggio r , allora $\mathcal{D}(B_r(x_0)) = \bar{B}_r(x_0)$ e $B_r(x_0)$ non ha alcun punto isolato.
4. Sia $(a_n)_n$ una successione reale convergente al numero a che assume infiniti valori diversi, e sia $A = \{x = a_n : n \in \mathbb{N}\}$ l'insieme dei valori della successione. Allora ogni $a_n \neq a$ è un punto isolato di A e A ha un unico punto di accumulazione: a .

Definizione 1.1.10 (Insiemi aperti e chiusi) Sia $A \subset \mathbb{R}^n$. Si dice che A è (un insieme) aperto se ogni $x \in A$ è un punto interno ad A , cioè se $\overset{\circ}{A} = A$. Si dice, invece, che A è (un insieme) chiuso se il suo complementare A^c è (un insieme) aperto.

Esempi 1.1.11

1. Siano $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$. Allora $B_r(x_0)$ è un insieme aperto. Infatti, per ogni $x \in B_r(x_0)$ le palle aperte di centro x e raggio $\varrho < r - \|x - x_0\|$ sono contenute in $B_r(x_0)$:

$$y \in B_\varrho(x) \Rightarrow \|y - x\| < \varrho \Rightarrow \|y - x_0\| \leq \|y - x\| + \|x - x_0\| < r \Rightarrow y \in B_r(x_0)$$

Invece, ragionando in modo analogo sui complementari, si verifica che $\bar{B}_r(x_0)$ e $S_r(x_0)$ sono insiemi chiusi.

2. \mathbb{Q} non è né chiuso né aperto.
3. \mathbb{N} e \mathbb{Z} sono chiusi.
4. \mathbb{R}^n e \emptyset sono gli unici sottoinsiemi di \mathbb{R}^n aperti e chiusi contemporaneamente.

Vediamo ora le principali proprietà degli aperti e dei chiusi. Data una famiglia \mathcal{A} di insiemi di \mathbb{R}^n , usiamo la seguente notazione:

$$\begin{aligned} \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A &= \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \exists A \in \mathcal{A} \text{ tale che } x \in A \right\} \\ \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A &= \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x \in A \quad \forall A \in \mathcal{A} \right\}. \end{aligned}$$

Proposizione 1.1.12 (Proprietà degli aperti e dei chiusi)

1. Se \mathcal{A} è una famiglia qualsiasi di insiemi aperti di \mathbb{R}^n , allora $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ è ancora un insieme aperto. Se \mathcal{A} è una famiglia finita di insiemi aperti di \mathbb{R}^n , allora $\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$ è ancora un insieme aperto.
2. Se \mathcal{C} è una famiglia qualsiasi di insiemi chiusi di \mathbb{R}^n , allora $\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C$ è ancora un insieme chiuso. Se \mathcal{C} è una famiglia finita di insiemi chiusi di \mathbb{R}^n , allora $\bigcup_{C \in \mathcal{C}} C$ è ancora un insieme chiuso.

Esempi 1.1.13

1. Gli intervalli $A =]0, 1[$ e $B =]2, 3[$ sono insiemi aperti di \mathbb{R} . Allora $]0, 1[\cup]2, 3[$ è ancora un insieme aperto di \mathbb{R} .
2. Gli insiemi \mathbb{N} e $[0, 1]$ sono insiemi chiusi di \mathbb{R} . Allora $\mathbb{N} \cup [0, 1]$ e $\mathbb{N} \cap [0, 1]$ sono insiemi chiusi di \mathbb{R} .

Gli insiemi chiusi possono così caratterizzarsi:

Teorema 1.1.14 (Caratterizzazione dei chiusi) Sia $C \subset \mathbb{R}^n$. Allora: C è chiuso se, e solo se, $\partial C \subset C$ se, e solo se, $\mathcal{D}(C) \subset C$.

Definizione 1.1.15 (Chiusura, parte interna) Sia $A \subset \mathbb{R}^n$.

Si dice chiusura di A e si indica con \bar{A} l'insieme $A \cup \partial A$.

Si dice parte interna di A l'insieme $\overset{\circ}{A}$ dei punti interni ad A .

Osservazione 1.1.16 Osserviamo che \bar{A} è un insieme chiuso, ed anzi è il più piccolo insieme chiuso contenente A . Invece, $\overset{\circ}{A}$ è il più grande insieme aperto contenuto in A .

Inoltre, risulta: $\overset{\circ}{A} \subset A \subset \bar{A}$; $\bar{A} = A \cup \partial A$; $\partial A = \bar{A} \setminus \overset{\circ}{A}$.

Definizione 1.1.17 (Insiemi limitati) Sia $A \subset \mathbb{R}^n$. Si dice che A è limitato se esiste $r > 0$ tale che $A \subset B_r(0)$, cioè se esiste $r > 0$ tale che $\|x\| \leq r$ per ogni $x \in A$.

Osserviamo che, se A è un sottoinsieme di \mathbb{R}^n limitato, allora, per ogni $i = 1, \dots, n$, $A_i := \{p_i(x) \in \mathbb{R} : x \in A\}$ è un insieme limitato di \mathbb{R} . Vale anche il viceversa, cioè se A_i è limitato per ogni $i = 1, \dots, n$, allora A è limitato.

Una proprietà degli intervalli di \mathbb{R} è la *connessione*, che può esprimersi dicendo che $I \subset \mathbb{R}$ è un intervallo se e solo se per ogni coppia di punti $x_1 < x_2 \in I$ l'insieme $\{x : x_1 < x < x_2\}$ è contenuto in I . Per generalizzare i risultati dipendenti da tale proprietà al caso di \mathbb{R}^n , iniziamo definendo i segmenti e le poligonalali in \mathbb{R}^n .

Definizione 1.1.18 (Segmenti e poligonalali) Dati $x, y \in \mathbb{R}^n$, si dice segmento di estremi x ed y l'insieme

$$[x, y] = \{ty + (1 - t)x : 0 \leq t \leq 1\} = \{x + t(y - x) : 0 \leq t \leq 1\};$$

dati i punti x_0, x_1, \dots, x_k , si dice poligonale di vertici x_0, x_1, \dots, x_k (nell'ordine), l'unione dei segmenti $[x_{i-1}, x_i]$, per $i = 1, \dots, k$.

Osserviamo che con gli stessi vertici si possono ottenere poligonalali differenti mutandone l'ordine: perciò nella definizione precedente abbiamo sottolineato che la poligonale non è definita solo dai vertici, ma anche dall'ordine in cui vengono assegnati. Usando le poligonalali, si può dare una nozione di connessione in \mathbb{R}^n .

Definizione 1.1.19 (Insiemi connessi per poligonalali) Un sottoinsieme A di \mathbb{R}^n si dice connesso per poligonalali se per ogni coppia di punti $x, y \in A$ esiste una poligonale di vertici $x = x_0, x_1, \dots, x_k = y$ tutta contenuta in A .

Una nozione più generale è quella di insieme connesso.

Definizione 1.1.20 (Insiemi connessi) Un sottoinsieme E di \mathbb{R}^n si dice connesso se non esistono due insiemi aperti A, B con le seguenti proprietà:

$$A \cap B = \emptyset, \quad A \cap E \neq \emptyset, \quad B \cap E \neq \emptyset, \quad E \subset A \cup B.$$

Esempi 1.1.21

1. Se E è connesso per poligonalità allora è connesso. Il viceversa in generale non è vero: una circonferenza è connessa ma non è connessa per poligonalità. Però se E è aperto allora E è connesso se e solo se è connesso per poligonalità.
2. Un insieme $A \subset \mathbb{R}^n$ si dice *convesso* se per ogni coppia di punti $x, y \in A$ il segmento $[x, y]$ è contenuto in A . Ovviamente, ogni insieme convesso è connesso per poligonalità. Per esempio, se $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ è convessa allora il suo *sopragrafico* $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in (a, b), y > f(x)\}$ è un insieme convesso di \mathbb{R}^2 .
3. Un insieme $A \subset \mathbb{R}^n$ si dice *stellato rispetto al punto* $x_0 \in A$ se per ogni punto $x \in A$ il segmento $[x_0, x]$ è contenuto in A . Ogni insieme A che sia stellato rispetto ad un punto è connesso per poligonalità: dati $x, y \in A$, la poligonale $[x, x_0] \cup [x_0, y]$ è infatti sempre contenuta in A .
4. Si può dimostrare che ogni aperto $A \subset \mathbb{R}^n$ (se non è connesso per poligonalità) si può decomporre in un'unione disgiunta di sottoinsiemi aperti connessi per poligonalità. Ciascuno di questi si dice *componente connessa* di A .

1.2 Successioni

Sia $(x_h)_h$ una successione a valori in \mathbb{R}^n , cioè con $x_h \in \mathbb{R}^n$ per ogni $h \in \mathbb{N}$. Allora:

Definizione 1.2.1 Si dice che la successione $(x_h)_h$ è *limitata* se esiste $r > 0$ tale che

$$\forall h \in \mathbb{N} \quad \|x_h\| \leq r.$$

Definizione 1.2.2 Si dice che la successione $(x_h)_h$ *converge*, o è *convergente*, ad un elemento $x_0 \in \mathbb{R}^n$, e si scrive $\lim_{h \rightarrow \infty} x_h = x_0$, se:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \nu > 0 \text{ tale che } \forall h \in \mathbb{N} \quad h > \nu \implies \|x_h - x_0\| < \varepsilon.$$

Definizione 1.2.3 Si dice che la successione $(x_h)_h$ *diverge*, o è *divergente*, e si scrive $\lim_{h \rightarrow \infty} \|x_h\| = +\infty$, se:

$$\forall M > 0 \exists \nu > 0 \text{ tale che } \forall h \in \mathbb{N} \quad h > \nu \implies \|x_h\| > M.$$

Si può dimostrare che (come nel caso delle successioni reali)

Proposizione 1.2.4 Se $(x_h)_h$ è una successione convergente di \mathbb{R}^n , allora $(x_h)_h$ è limitata.

Proposizione 1.2.5 Sia $(x_h)_h$ una successione di \mathbb{R}^n . Supponiamo che $x_h = (x_h^1, \dots, x_h^n)$ per ogni $h \in \mathbb{N}$. Sono equivalenti:

- (i) la successione vettoriale $(x_h)_h$ è convergente ad $x_0 = (x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n) \in \mathbb{R}^n$

(ii) per ogni $i = 1, \dots, n$ la successione reale $(x_h^i)_h$ converge ad x_0^i .

DIM. Segue immediatamente dalle disuguaglianze valide per ogni $i = 1, \dots, n$

$$|x_h^i - x_0^i| \leq \|x_h - x_0\| \leq \sum_{k=1}^n |x_h^k - x_0^k|. \quad \boxed{QED}$$

Osservazione 1.2.6 Dalla proposizione precedente segue subito che, come nel caso delle successioni reali, il limite di una successione convergente è unico.

Esempio 1.2.7 1. Sia $x_h = (\frac{1}{h}, \frac{1+h}{h})$ per ogni $h \in \mathbb{N}$. Poiché $(\frac{1}{h})_h$ e $(\frac{1+h}{h})_h$ convergono a 0 e a 1 rispettivamente, per la Proposizione 1.2.5 possiamo concludere che la successione data converge a $(0, 1)$ in \mathbb{R}^2 .

2. La successione $(x_h)_h = (((-1)^h, \frac{1}{h}))_h$ è limitata, ma non convergente poiché $((-1)^h)_h$ non è una successione regolare in \mathbb{R} . Quindi possiamo concludere che anche in \mathbb{R}^n la limitatezza della successione è solo una condizione necessaria, ma non sufficiente per la convergenza.

Come al solito, se $(x_h)_h$ è una successione di \mathbb{R}^n ed $(k_h)_h$ è una successione strettamente crescente di numeri naturali, la successione $(x_{k_h})_h$ si dice successione estratta, o sottosuccessione, di $(x_h)_h$.

Osserviamo che, come nel caso reale, se $(x_h)_h$ è una successione convergente di \mathbb{R}^n , il cui limite è x_0 , allora ogni successione estratta di $(x_h)_h$ converge allo stesso limite x_0 . Ma esistono successioni non convergenti che ammettono estratte convergenti come $(((-1)^h, 1))_h$.

Esempio 1.2.8 Sia $(x_h)_h = ((\frac{1}{h}, 1, h))_h$ e sia $(k_h)_h = (h^2)_h$. Allora $((\frac{1}{h^2}, 1, h^2))_h$ è una successione estratta di $((\frac{1}{h}, 1, h))_h$.

Con le successioni si possono caratterizzare gli insiemi chiusi.

Proposizione 1.2.9 *L'insieme $A \subset \mathbb{R}^n$ è chiuso se e solo se vale la seguente proprietà: se $(x_h)_h$ è una successione convergente di punti di A , detto x il suo limite, risulta che x appartiene ad A .*

Introduciamo ora un'altra classe di insiemi particolarmente importante.

Definizione 1.2.10 (Insiemi compatti) *Sia $K \subset \mathbb{R}^n$. Si dice che K è un insieme compatto di \mathbb{R}^n se da ogni successione a valori in K si può estrarre una sottosuccessione convergente ad un elemento di K .*

Si può dimostrare il seguente Teorema di Heine-Borel.

Teorema 1.2.11 (Compatti di \mathbb{R}^n) *Sia $K \subset \mathbb{R}^n$. Allora K è compatto se, e solo se, K è chiuso e limitato.*

Esempio 1.2.12 Sia $K = \bar{B}_r(x_0)$. Allora K è compatto perché è chiuso e limitato. Analogamente, $K = S_r(x_0)$ è compatto perché è chiuso e limitato.

Sia $K = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ un insieme finito di punti di \mathbb{R}^n . Allora K è compatto perché è chiuso e limitato.

1.3 Limiti e continuità delle funzioni

In questo paragrafo iniziamo lo studio sistematico delle funzioni f dipendenti da una variabile vettoriale $x = (x_1, \dots, x_n)$ appartenente ad un sottoinsieme A di \mathbb{R}^n , detto al solito *dominio di f* . Spesso la funzione f sarà definita da un'espressione analitica formulata usando le usuali funzioni elementari. In questo caso, come per le funzioni di una variabile, diciamo *dominio naturale* dell'espressione analitica, o, più brevemente, della funzione f , il più grande sottoinsieme di punti x di \mathbb{R}^n in cui tutte le operazioni richieste per il calcolo del valore $f(x)$ si possono eseguire.

Definizione 1.3.1 *Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ e sia $x_0 \in \mathbb{R}^n$ un punto di accumulazione di A . Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione. Si dice che f tende ad $\ell \in \mathbb{R}$ per x che tende a x_0 , e si scrive $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$, se*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ tale che } \forall x \in A, \quad 0 < \|x - x_0\| < \delta \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Si dice che f tende a $+\infty$ per x che tende a x_0 , e si scrive $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, se

$$\forall M > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ tale che } \forall x \in A, \quad 0 < \|x - x_0\| < \delta \implies f(x) > M.$$

Si dice che f tende a $-\infty$ per x che tende a x_0 , e si scrive $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$, se

$$\forall M > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ tale che } \forall x \in A, \quad 0 < \|x - x_0\| < \delta \implies f(x) < -M.$$

Se A è illimitato, si può definire anche il limite di f all'infinito, ponendo

$$\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$$

(con ℓ reale) se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $R > 0$ tale che per ogni $x \in A$ con $\|x\| > R$ risulta $|f(x) - \ell| < \varepsilon$. Se $\ell = \pm\infty$ si dà l'analoga definizione, con le modifiche ovvie.

Osserviamo che per $n = 1$ la definizione data concorda con quella già nota per le funzioni reali di variabile reale. E in particolare, continuano a valere le stesse proprietà come:

Teorema 1.3.2 (Proprietà dei limiti) *Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ e sia $x_0 \in \mathbb{R}^n$ un punto di accumulazione di A . Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione tale che esiste $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$. Allora*

1. **[Unicità]** *Il limite è unico.*
2. **[Permanenza del segno]** *Se $\ell > 0$, allora esiste $r > 0$ tale che, per ogni $x \in A \cap B_r(x_0) \setminus \{x_0\}$, $f(x) > 0$.*
3. **[Confronto]** *Se esiste $r > 0$ tale che per ogni $x \in A \cap B_r(x_0) \setminus \{x_0\}$ risulti $f(x) > 0$, allora $\ell \geq 0$.*

4. **[Caratterizzazione dei limiti con successioni]** Sono equivalenti:

- (a) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$
 (b) $\forall (x_h)_h \subset A \setminus \{x_0\}, x_h \rightarrow x_0 \Rightarrow f(x_h) \rightarrow \ell.$

Anche per le operazioni sui limiti valgono risultati analoghi a quelli visti per le funzioni di una variabile reale.

Teorema 1.3.3 Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ e sia $x_0 \in \mathbb{R}^n$ un punto di accumulazione di A . Siano $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni tali che

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}, \quad \exists \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = m \in \mathbb{R}.$$

Allora

1. $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = \ell \pm m;$
2. $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = \ell \cdot m;$
3. $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell}{m},$ purché $m \neq 0.$

Questi risultati si estendono al caso in cui ℓ o m siano $\pm\infty$, purché le operazioni indicate non diano luogo a forme indeterminate.

Osservazione 1.3.4 Notiamo che l'esistenza del limite nella Definizione 1.3.1 è una condizione più forte dell'esistenza dei limiti delle restrizioni di f anche a tutte le rette passanti per x_0 . In altri termini, se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ allora per ogni $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$ fissato, risulta $\lim_{t \rightarrow 0} f(x_0 + tv) = \ell$. Viceversa, può accadere che $\lim_{t \rightarrow 0} f(x_0 + tv) = \ell$ per ogni $v \neq 0$, ma non esiste $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$. Per esempio, sia $n = 2$ e $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$. Allora, fissato $v = (v_1, v_2) \neq (0, 0)$ risulta:

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(tv_1, tv_2) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3 v_1^2 v_2}{t^4 v_1^4 + t^2 v_2^2} = 0,$$

per ogni v , mentre $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ non esiste. Infatti, considerando la restrizione di f alla curva di equazione $y = x^2$, cioè ponendo $y = x^2$, si ha che il

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x^2) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2},$$

e quindi $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ non esiste.

Definiamo ora le funzioni continue in più variabili reali.

Definizione 1.3.5 (Funzioni continue) Sia $A \subset \mathbb{R}^n$. Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione e sia $x_0 \in A$. Si dice che f è continua in x_0 se x_0 è un punto isolato di A oppure

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0),$$

o equivalentemente, se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{tale che } \forall x \in A, \quad \|x - x_0\| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Inoltre, si dice che f è continua in A se essa è continua in ogni punto di A .

Osservazione 1.3.6 È immediato dare le definizioni di limite e continuità per funzioni a valori vettoriali. Se $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ ed x_0 è di accumulazione per A allora

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}^k &\iff \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ tale che } \forall x \in A, \quad 0 < \|x - x_0\| < \delta : &\|f(x) - \ell\| < \varepsilon, \end{aligned}$$

dove $\|\cdot\|$ indica la norma euclidea sia in \mathbb{R}^n che in \mathbb{R}^k . Ovviamente, se $x_0 \in A$ allora f è continua in x_0 se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Come per le successioni vale che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell = (\ell_1, \dots, \ell_k) \in \mathbb{R}^k \iff \lim_{x \rightarrow x_0} f_i(x) = \ell_i \quad \forall i = 1, \dots, k,$$

dove f_i sono le componenti di f , quindi $f = (f_1, \dots, f_k) : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ è continua in x_0 se e solo se tutte le f_j lo sono.

Vale il seguente Teorema.

Teorema 1.3.7 (Continuità della funzione composta) Siano $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^k$ e siano $f : A \rightarrow B$ continua in $x_0 \in A$, $g : B \rightarrow \mathbb{R}^p$ continua in $y_0 = f(x_0)$. Allora, la funzione composta $h = g \circ f : A \rightarrow \mathbb{R}^p$ è continua in x_0 .

La definizione di funzione continua in A è stata data in modo puntuale, cioè sulla base del comportamento della funzione nei singoli punti; si può dare una utile caratterizzazione della continuità in A in termini globali come segue.

Proposizione 1.3.8 Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ ed $f : A \rightarrow \mathbb{R}^k$. Se A è aperto, f è continua in A se e solo se $f^{-1}(B)$ è un aperto di \mathbb{R}^n per ogni aperto B di \mathbb{R}^k ; se A è chiuso, f è continua in A se e solo se $f^{-1}(C)$ è un chiuso di \mathbb{R}^n per ogni chiuso C di \mathbb{R}^k . In particolare, se $A = \mathbb{R}^n$ allora entrambe le caratterizzazioni della continuità sono valide.

Per il Teorema 1.3.3 possiamo affermare che somme e prodotti di funzioni continue sono ancora funzioni continue.

Riformuliamo ora alcuni concetti già esposti nel corso di Analisi Matematica I.

Definizione 1.3.9 (Funzioni limitate) Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ e sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione. Si dice che f è limitata superiormente in A se esiste $L \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) \leq L$ per ogni $x \in A$ (in tal caso, L è detto maggiorante di f in A). Si dice che f è limitata inferiormente in A se esiste $H \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) \geq H$ per ogni $x \in A$ (in tal caso, H è detto minorante di f in A). Infine f si dice limitata in A se esistono $L, H \in \mathbb{R}$ tali che $H \leq f(x) \leq L$ per ogni $x \in A$, o equivalentemente, esiste $M > 0$ tale che $|f(x)| \leq M$ per ogni $x \in A$.

In analogia al caso delle funzioni reali di variabile reale, se f è limitata superiormente in A , si definisce estremo superiore di f in A , e si indica con $\sup_{x \in A} f(x)$ o con $\sup_A f$, il minimo dei maggioranti di f in A . In particolare, risulta:

$$\sup_A f = \sup\{f(x) : x \in A\}.$$

Se f è limitata inferiormente, si definisce estremo inferiore di f in A , e si indica con $\inf_{x \in A} f(x)$ o con $\inf_A f$, il massimo dei minoranti di f in A . In particolare, risulta:

$$\inf_A f = \inf\{f(x) : x \in A\}.$$

Se poi f non è limitata superiormente (rispettivamente, inferiormente) in A può essere utile scrivere $\sup_A f = +\infty$ (resp. $\inf_A f = -\infty$).

Definizione 1.3.10 Sia f una funzione definita in $A \subset \mathbb{R}^n$ e ivi limitata superiormente. Se esiste $x_1 \in A$ tale che $f(x_1) = \sup_A f$, e quindi $f(x) \leq f(x_1)$ per ogni $x \in A$, si dice che $f(x_1)$ è il massimo di f in A , o che f è dotata di massimo in A , e si scrive $\max_A f = f(x_1)$. Il punto x_1 si dice punto di massimo per f in A .

Sia f limitata inferiormente in A . Se esiste $x_2 \in A$ tale che $f(x_2) = \inf_A f$, e quindi $f(x) \geq f(x_2)$ per ogni $x \in A$, si dice che $f(x_2)$ è il minimo di f in A , o che f è dotata di minimo in A , e si scrive $\min_A f = f(x_2)$. Il punto x_2 si dice punto di minimo per f in A .

Con una dimostrazione molto simile al caso delle funzioni di una variabile, risulta che:

Teorema 1.3.11 (Weierstrass) Sia K un sottoinsieme compatto di \mathbb{R}^n e sia f una funzione definita e continua in K . Allora f è dotata di massimo e di minimo in K .

Il seguente risultato estende al caso di funzioni di più variabili il Teorema dei valori intermedi.

Teorema 1.3.12 (dei valori intermedi) *Se $A \subset \mathbb{R}^n$ è connesso ed $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ è continua in A , allora $f(A)$ è un intervallo, cioè, per ogni numero reale y compreso tra $\inf_A f$ e $\sup_A f$ esiste $x \in A$ tale che $f(x) = y$.*

Si può dare come nel caso di una variabile una nozione più forte di continuità.

Definizione 1.3.13 (Uniforme continuità) *Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ ed $f : A \rightarrow \mathbb{R}$; si dice che f è uniformemente continua in A se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $x, y \in A$, $\|x - y\| < \delta$ implica $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.*

Ovviamente, ogni funzione uniformemente continua è continua. Viceversa la funzione definita in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ da $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$ è continua ma non è uniformemente continua.

Vale anche per le funzioni di più variabili il seguente risultato.

Teorema 1.3.14 (Heine-Cantor) *Sia $K \subset \mathbb{R}^n$ un insieme compatto, ed $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ continua in K ; allora f è uniformemente continua in K .*

Un caso di funzioni uniformemente continue particolarmente interessanti è costituito dalle funzioni Lipschitziane.

Definizione 1.3.15 (Funzione Lipschitziana) *Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ ed $f : A \rightarrow \mathbb{R}$; si dice che f è Lipschitziana in A se esiste $L > 0$ tale che $\forall x, y \in A$, $|f(x) - f(y)| \leq L\|x - y\|$.*

Esempio 1.3.16 La norma è una funzione Lipschitziana in \mathbb{R}^n con costante $L = 1$ infatti (come nel caso del valore assoluto) vale la disuguaglianza

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

1.4 Funzioni vettoriali di una variabile

Se φ è una funzione definita in un intervallo $(a, b) \subset \mathbb{R}$ a valori in \mathbb{R}^n , possiamo esprimerla attraverso le sue componenti $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, che sono funzioni reali. In analogia alla definizione di limite di una successione in \mathbb{R}^n , la funzione φ è continua in $t_0 \in (a, b)$ se $\varphi(t) \rightarrow \varphi(t_0)$ per $t \rightarrow t_0$, cioè, equivalentemente, se le componenti φ_i di φ sono continue in t_0 . Inoltre, allo stesso modo, diciamo che φ è derivabile in t_0 se esiste il limite

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t - t_0},$$

che si denoterà $\varphi'(t_0)$. Come prima, questo equivale a richiedere che le componenti φ_i siano derivabili in t_0 ; in tal caso, risulta $\varphi'(t_0) = (\varphi'_1(t_0), \dots, \varphi'_n(t_0))$. Il discorso si può

naturalmente estendere alle derivate di ordine superiore. Analogamente, diciamo che φ è integrabile in (a, b) se le sue componenti lo sono, e poniamo

$$\int_a^b \varphi(t) dt = \left(\int_a^b \varphi_1(t) dt, \dots, \int_a^b \varphi_n(t) dt \right).$$

Osserviamo che tanto $\varphi'(t_0)$ quanto $\int_a^b \varphi(t) dt$, quando esistono, sono vettori di \mathbb{R}^n , così come i valori di φ , e che vale la disuguaglianza:

$$\left\| \int_a^b \varphi(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|\varphi(t)\| dt.$$

Inoltre, ragionando componente per componente, si ricava la seguente formulazione vettoriale del Teorema fondamentale del calcolo integrale per le funzioni vettoriali.

Teorema 1.4.1 *Se $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ è continua, allora la funzione*

$$\psi(t) = \int_a^t \varphi(s) ds, \quad t \in [a, b],$$

è derivabile in $[a, b]$, e risulta $\psi'(t) = \varphi(t)$ per ogni $t \in [a, b]$.

Osservazione 1.4.2 Concludiamo questo paragrafo segnalando che è possibile considerare successioni (u_k) e serie di funzioni $\sum_k u_k$ a valori vettoriali, cioè con $u_k : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Valgono tutte le considerazioni presentate nel corso di Analisi Matematica I, sia per quanto riguarda la terminologia e le definizioni, che per quanto riguarda i risultati. Le uniche varianti, per altro puramente formali, sono le seguenti: nella definizione di convergenza assoluta di una serie di funzioni, la serie $\sum_k |u_k(x)|$ va sostituita con la serie $\sum_k \|u_k(x)\|$, e nel criterio di Weierstrass la condizione $|u_k(x)| \leq M_k \forall x \in I$ va sostituita con la $\|u_k(x)\| \leq M_k \forall x \in I$.

CAPITOLO 2

CALCOLO DIFFERENZIALE IN PIÙ VARIABILI

In questo capitolo estendiamo al caso di funzioni definite in sottoinsiemi di \mathbb{R}^n , per $n \geq 2$, le nozioni ed i metodi del calcolo differenziale visti nel corso di Analisi Matematica I per le funzioni di una sola variabile reale. Incontreremo, oltre a complicazioni tecniche, problemi e fenomeni nuovi che richiederanno l'introduzione di nuove idee e strumenti. Discutiamo prima il caso di funzioni a valori reali, poi quello di funzioni a valori vettoriali.

2.1 Derivate parziali e differenziabilità

La prima nozione che vogliamo estendere al caso di funzioni di più variabili reali è quella di derivata. Iniziamo dalla nozione di derivata direzionale, che è certamente l'estensione più spontanea della definizione di derivata al caso n -dimensionale. Purtroppo, con questa sola definizione, neanche le prime proprietà delle funzioni derivabili di una sola variabile reale si estendono al caso n -dimensionale.

Definizione 2.1.1 (Derivata direzionale) *Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in A$ e $v \in \mathbb{R}^n$ tale che $\|v\| = 1$. Diciamo che f ammette derivata direzionale in x_0 lungo la direzione v se esiste finito il limite*

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}. \quad (2.1.1)$$

Se tale limite esiste si denota $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$ o $D_v f(x_0)$. Le derivate direzionali di f in x_0 rispetto alle direzioni e_i , $i = 1, \dots, n$, degli assi coordinati si dicono derivate parziali di f in x_0 e si denotano (quando esistono) in uno dei modi seguenti:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0), \quad D_i f(x_0), \quad D_{x_i} f(x_0).$$

Esempio 2.1.2 L'esistenza delle derivate direzionali di f in x_0 , anche lungo tutte le direzioni v non assicura la continuità di f in x_0 . Consideriamo infatti la funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ data da

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y \geq x^2 \text{ o } y \leq 0, \\ 1 & \text{se } 0 < y < x^2; \end{cases}$$

f ammette tutte le derivate direzionali in $(0, 0)$, esse valgono 0, ma ovviamente f non è continua nell'origine.

Si vede dalla definizione che la condizione di esistenza delle derivate direzionali in x_0 si può formalizzare così:

$$\forall \|v\| = 1, \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ tale che } |t| < \delta \implies \left| \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} - \frac{\partial f}{\partial v}(x_0) \right| < \varepsilon,$$

dove evidentemente δ dipende sia da ε che da v . Se si analizza in dettaglio l'esempio precedente, si vede che, per $\varepsilon > 0$ fissato, $\delta \rightarrow 0$ quando il versore v tende al versore $e_1 = (1, 0)$.

Per ottenere una procedura di derivazione che assicuri proprietà più forti alle funzioni derivabili introduciamo la seguente definizione.

Definizione 2.1.3 (Differenziabilità) Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in A$. Diciamo che f è differenziabile in x_0 se esiste un'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - L(h)}{\|h\|} = 0, \quad (2.1.2)$$

o equivalentemente

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - L(x - x_0)}{\|x - x_0\|} = 0.$$

Se f è differenziabile in x_0 allora l'applicazione L si dice differenziale di f in x_0 e si indica con df_{x_0} .

Osservazione 2.1.4 (Proprietà delle funzioni differenziabili)

1. Possiamo esplicitare la richiesta nella definizione precedente come abbiamo fatto per le derivate direzionali per confrontare le due nozioni, scrivendo la variabile h nella forma $h = tv$, con $\|v\| = 1$ e di conseguenza $t = \|h\|$; otteniamo che deve esistere un'applicazione lineare L tale che:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ tale che } |t| < \delta \implies \frac{|f(x_0 + tv) - f(x_0) - tL(v)|}{|t|} < \varepsilon \quad \forall \|v\| = 1,$$

dove stavolta si vede che δ dipende da ε ma può essere scelto indipendente dalla direzione v .

2. Se una funzione f è differenziabile in x_0 allora il suo differenziale è unico. Infatti, se per assurdo ce ne fossero due distinti, chiamiamoli L ed L' , esisterebbe un $v \neq 0$, che possiamo supporre di norma unitaria, tale che $L(v) \neq L'(v)$, così che si avrebbe

$$\begin{aligned} 0 &\neq L'(v) - L(v) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{L'(tv) - L(tv)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0) - L(tv)}{t} - \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0) - L'(tv)}{t} = 0. \end{aligned}$$

3. La differenziabilità di f in x_0 implica la continuità di f nello stesso punto; infatti, la relazione (2.1.2) si può scrivere

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = L(h) + o(\|h\|),$$

da cui segue che $f(x_0 + h) - f(x_0) \rightarrow 0$ per $h \rightarrow 0$.

4. La differenziabilità di f in x_0 implica l'esistenza di tutte le derivate direzionali di f nello stesso punto, ed anche l'eguaglianza $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = L(v)$ da cui segue la linearità dell'applicazione $v \mapsto \frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$. Infatti,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left| \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} - L(v) \right| = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|f(x_0 + tv) - f(x_0) - L(tv)|}{\|tv\|} = 0.$$

5. Come si è visto nel corso di Geometria ed algebra, all'applicazione lineare L della Definizione 2.1.3 è univocamente associato un vettore $\nabla f(x_0)$ di \mathbb{R}^n in modo tale che $L(v) = \nabla f(x_0) \cdot v$, sicché si ha la formula

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \nabla f(x_0) \cdot v = \sum_{i=1}^n v_i \left(\nabla f(x_0) \right)_i$$

per ogni vettore $v \in \mathbb{R}^n$. Scegliendo $v = e_i$ segue che le componenti di $\nabla f(x_0)$ sono le derivate parziali di f in x_0 , cioè:

$$\nabla f(x_0) = (D_1 f(x_0), \dots, D_n f(x_0)).$$

Definizione 2.1.5 (Gradiente) Il vettore $\nabla f(x_0)$ associato all'applicazione lineare L nella Definizione 2.1.3 si dice *gradiente* di f in x_0 .

Se f ammette derivate parziali nel punto x_0 , è naturale domandarsi se sia differenziabile. Dall'unicità del differenziale e dalla discussione precedente segue che se f è differenziabile in x_0 allora l'applicazione lineare L della Definizione 2.1.3 è quella associata al vettore $\nabla f(x_0)$. Pertanto la verifica della differenziabilità si riduce a vedere se vale la seguente relazione di limite:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - \nabla f(x_0) \cdot h}{\|h\|} = 0. \quad (2.1.3)$$

Questa è la strategia da seguire per verificare la differenziabilità: si verifica l'esistenza delle derivate parziali nel punto, e poi se vale (2.1.3). Anche la dimostrazione del Teorema del differenziale, dove l'esistenza delle derivate parziali è un'ipotesi, è basata su (2.1.3).

Se f ammette derivate parziali in tutto un insieme aperto, per esempio A stesso, ci si può domandare se, al variare del punto x in A , le derivate parziali siano continue. Si dice

che f è di classe $C^1(A)$ se ciò accade per tutte le derivate parziali prime D_1f, \dots, D_nf in A . Vale allora il seguente importante risultato, che è il principale strumento per verificare la differenziabilità di una funzione.

Teorema 2.1.6 (Teorema del differenziale) *Sia A un aperto di \mathbb{R}^n , sia $x_0 \in A$, e sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$; se le derivate parziali di f esistono in un intorno di x_0 e sono continue in x_0 allora f è differenziabile in x_0 . Inoltre, se f è di classe $C^1(A)$ allora è differenziabile in tutti i punti di A .*

DIM. Supponiamo per semplicità di notazione $n = 2$, e denotiamo le variabili con (x, y) e gli incrementi con (h, k) . Allora, la relazione da provare è:

$$\lim_{\sqrt{h^2+k^2} \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) - [D_x f(x_0, y_0)h + D_y f(x_0, y_0)k]}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0.$$

Scrivendo

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) = [f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0+k)] + [f(x_0, y_0+k) - f(x_0, y_0)],$$

si può applicare il teorema di Lagrange alle funzioni di una variabile

$$x \mapsto f(x, y_0+k), \quad y \mapsto f(x_0, y),$$

(definite rispettivamente negli intervalli di estremi x_0, x_0+h ed y_0, y_0+k), ottenendo

$$\begin{aligned} f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0+k) &= D_x f(\xi, y_0+k)h, \\ f(x_0, y_0+k) - f(x_0, y_0) &= D_y f(x_0, \eta)k, \end{aligned}$$

dove ξ ed η sono due opportuni punti dei suddetti intervalli. Ne segue

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) - [D_x f(x_0, y_0)h + D_y f(x_0, y_0)k]}{\sqrt{h^2+k^2}} \right| \\ &= \left| \frac{[D_x f(\xi, y_0+k)h + D_y f(x_0, \eta)k] - [D_x f(x_0, y_0)h + D_y f(x_0, y_0)k]}{\sqrt{h^2+k^2}} \right| \\ &\leq \left| [D_x f(\xi, y_0+k) - D_x f(x_0, y_0)] \frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}} \right| + \left| [D_y f(x_0, \eta) - D_y f(x_0, y_0)] \frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}} \right| \end{aligned}$$

e il limite è nullo perché, per $(h, k) \rightarrow (0, 0)$, ξ tende ad x_0 , η tende a y_0 , i rapporti $\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}$ e $\frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}$ sono compresi tra -1 e 1 , e i termini in parentesi quadre tendono a zero per la continuità delle derivate prime di f in (x_0, y_0) . \square

Una volta chiarito che il calcolo del differenziale di una funzione si riconduce al calcolo delle sue derivate parziali, poiché le derivate parziali sono sostanzialmente derivate di funzioni di una sola variabile reale, è evidente che vale il seguente risultato.

Proposizione 2.1.7 *Somme, prodotti, quozienti (dove il denominatore non si annulla) di funzioni differenziabili sono differenziabili, e le derivate parziali seguono le regole di derivazione delle derivate delle funzioni di una variabile reale:*

1. $D_i(\alpha f + \beta g) = \alpha D_i f + \beta D_i g \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n;$
2. $D_i(fg) = f D_i g + g D_i f;$
3. $D_i\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g D_i f - f D_i g}{g^2}.$

Esempio 2.1.8 Il calcolo delle derivate parziali è molto semplice, infatti basta trattare le altre variabili come costanti e derivare la funzione solo rispetto alla variabile considerata. Ad esempio, se $f(x, y) = x \cos(xy)$ allora $D_x f = \cos(xy) - xy \sin(xy)$ e $D_y f = -x^2 \sin(xy)$.

È un po' più delicato il discorso relativo alla derivazione della composizione di due funzioni, che affronteremo in due passi. Un primo risultato che estende una formula già vista nel caso delle funzioni di una variabile è il seguente.

Teorema 2.1.9 (Differenziale della funzione composta) *Siano $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo, $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto, e siano $\varphi : I \rightarrow A$ derivabile in I , $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ di classe $C^1(A)$. Allora, la funzione composta $g = f \circ \varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ è derivabile, e per ogni $t \in I$ risulta:*

$$g'(t) = \nabla f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(\varphi(t)) \varphi'_j(t),$$

dove $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ sono le componenti di φ .

DIM. Fissato $t_0 \in I$ e posto $x_0 = \varphi(t_0)$, per ipotesi risulta $\varphi(t_0 + \tau) - \varphi(t_0) = \varphi'(t_0)\tau + o(\tau)$ ed $f(x_0 + h) - f(x_0) = df_{x_0}h + o(h)$. Pertanto

$$\begin{aligned} g(t_0 + \tau) - g(t_0) &= df_{x_0}(\varphi(t_0 + \tau) - \varphi(t_0)) + o((\varphi(t_0 + \tau) - \varphi(t_0))) \\ &= df_{x_0}(\varphi'(t_0)\tau + o(\tau)) + o(\varphi'(t_0)\tau) = \nabla f(x_0) \cdot \varphi'(t_0)\tau + o(\tau). \end{aligned}$$

QED

Come nel caso di una variabile, si ha la seguente conseguenza.

Teorema 2.1.10 *Se f ammette derivate parziali in A , con $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto connesso per poligonalità, e $\nabla f(x) = 0$ per ogni $x \in A$, allora f è costante in A .*

DIM. Dati $x, y \in A$, basta provare che $f(x) = f(y)$. Per l'arbitrarietà di x, y la funzione f risulterà costante. Per ipotesi, esiste una poligonale P di vertici $x = x_0, x_1, \dots, x_k = y$ tutta contenuta in A . Per i fissato tra 1 e k , consideriamo la funzione $g(t) = f(x_{i-1} + t(x_i - x_{i-1}))$. Dal Teorema 2.1.9 segue $g'(t) = \nabla f(x_{i-1} + t(x_i - x_{i-1})) \cdot (x_i - x_{i-1}) = 0$ e

quindi $f(x_{i-1}) = g(0) = g(1) = f(x_i)$. Applicando questo argomento per ogni i si ricava che f è costante su P ed in particolare $f(x) = f(y)$. \square

Nel corso di Analisi Matematica I si è visto come si possa dedurre l'andamento del grafico di una funzione derivabile studiandone le derivate, quando $n = 1$, caso in cui il grafico è una curva nel piano. Per $n = 2$ il grafico di una funzione reale è una superficie, e questo rende ovviamente più complicato lo studio (e il disegno!). Per $n \geq 3$ il disegno del grafico diventa impossibile, e ci si deve accontentare di informazioni analitiche o di illustrazioni che non riproducono il grafico interamente, ma rappresentano solo alcune delle sue proprietà geometriche. Ci limitiamo ad una discussione del caso $n = 2$, riservandoci di segnalare alla fine qualche estensione al caso generale.

Sia $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 , sia $x_0 \in A$, e, fissato $v \in \mathbb{R}^2$ con $\|v\| = 1$, consideriamo la retta r in \mathbb{R}^2 passante per x_0 di direzione v , descritta parametricamente dall'equazione $x = x_0 + tv$, per $t \in \mathbb{R}$. Possiamo allora considerare la restrizione di f all'insieme $r \cap A \subset \mathbb{R}$. In particolare, possiamo considerare la funzione $f_v(t) = f(x_0 + tv)$ per t in un opportuno intorno dell'origine $I_v \subset \mathbb{R}$. Identificando ogni punto t di I_v con il punto $x = x_0 + tv$, il suo grafico

$$G(f_v) = \{(t, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f_v(t), t \in I_v\},$$

è la curva intersezione del grafico di f

$$G(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^3 : y = f(x), x \in A\} \quad (2.1.4)$$

con il piano verticale che interseca il piano (x_1, x_2) nella retta r . Siccome $f_v \in C^1(I_v)$, possiamo scrivere l'equazione della retta tangente al suo grafico nel punto di coordinate $t = 0, y = f_v(0) = f(x_0)$ usando il teorema della derivazione della funzione composta, e otteniamo la formula

$$y = f_v(0) + f'_v(0)t = f(x_0) + \frac{\partial f}{\partial v}(x_0)t = f(x_0) + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)v_i t.$$

Questa retta si dice *retta tangente al grafico di f nella direzione v* . Teniamo ora fisso il punto x_0 e lasciamo variare v : questo equivale, nella formula precedente, a considerare due parametri indipendenti $v_1 t$ e $v_2 t$. È naturale chiamarli u, v , ottenendo l'equazione parametrica di un piano, che chiamiamo *piano tangente al grafico di f* :

$$y = f(x_0) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)u + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0)v = f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (u, v).$$

Eliminando i parametri $u = x_1 - x_{01}, v = x_2 - x_{02}$ si perviene all'equazione cartesiana

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)(x_1 - x_{01}) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0)(x_2 - x_{02}) - y + f(x_0) = 0,}$$

ove si riconoscono i *coefficienti di giacitura*, determinati come sempre a meno del segno, $-D_1f(x_0), -D_2f(x_0), 1$. Il vettore $(-D_1f(x_0), -D_2f(x_0), 1)$ è quindi perpendicolare al piano tangente.

A questo punto, è facile generalizzare tutto il discorso al caso di un numero arbitrario di variabili indipendenti. Se $A \subset \mathbb{R}^n$ ed $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, introducendo coordinate cartesiane (x_1, \dots, x_n, y) in \mathbb{R}^{n+1} , la (2.1.4) definisce ancora il grafico di f (con \mathbb{R}^{n+1} al posto di \mathbb{R}^3). Se f è di classe C^1 in A , e x_0 è un punto di A , diciamo ancora *piano tangente al grafico di f* il sottospazio affine n -dimensionale di \mathbb{R}^{n+1} di equazione cartesiana

$$\boxed{y = f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0)}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Il versore

$$\nu = \frac{(-\nabla f(x_0), 1)}{\sqrt{1 + \|\nabla f(x_0)\|^2}}$$

è perpendicolare al piano tangente, ed è scelto in modo da avere componente positiva lungo l'asse verticale y .

Esempio 2.1.11 Consideriamo la funzione di due variabili $f(x, y) = x^2 + y^2$. Essa è differenziabile in \mathbb{R}^2 e il suo gradiente è $\nabla f(x, y) = (2x, 2y)$. Il piano tangente al grafico di f nel punto $(1, 1, 2)$ è dato da $z = 2(x - 1) + 2(y - 1) + 2 = 2x + 2y - 2$. I due grafici sono rappresentati in Figura – 2.1.

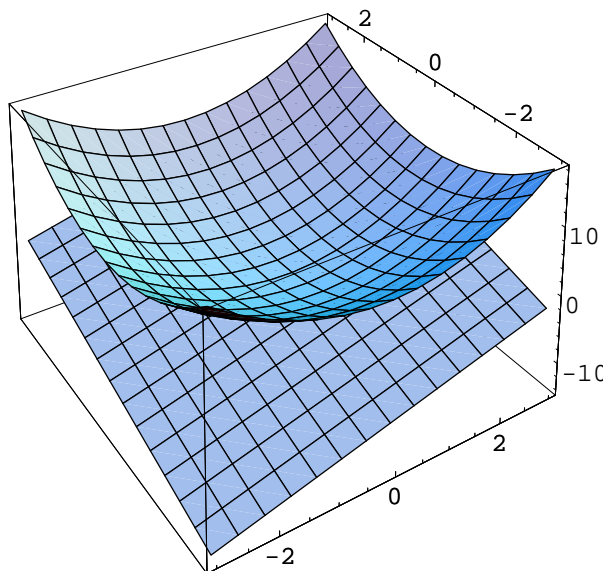


Figura – 2.1: Piano tangente al grafico.

Un'altra nozione utile a descrivere l'andamento di una funzione è quella di *insieme di livello*. Data al solito $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, e dato $c \in \mathbb{R}$, si dice *insieme di livello c di f* l'insieme $E_c = \{x \in A : f(x) = c\}$. Se $n = 2$ si parla di *curva di livello* e, se $n = 3$ di *superficie*

di livello. Intuitivamente, questa terminologia è giustificata dal fatto che l'insieme ove f è costante ci si aspetta sia “sottile” rispetto all'ambiente. In Fisica si parla anche di *superficie equipotenziali*, perché, se f è un campo scalare che esprime il potenziale associato ad un'interazione (per esempio, gravitazionale od elettrica), gli insiemi di livello sono quelli su cui il potenziale è costante. In tal caso, il gradiente di f esprime il *campo di forze* indotto dal potenziale, ed ha la direzione dell'accelerazione indotta su una particella soggetta alla forza dovuta al campo f . Le curve dello spazio che in ogni punto x hanno per retta tangente quella di direzione $\nabla f(x)$ si dicono *linee di flusso* e sono, in ogni punto, ortogonali alla superficie equipotenziale che passa per quel punto. Questa proprietà si

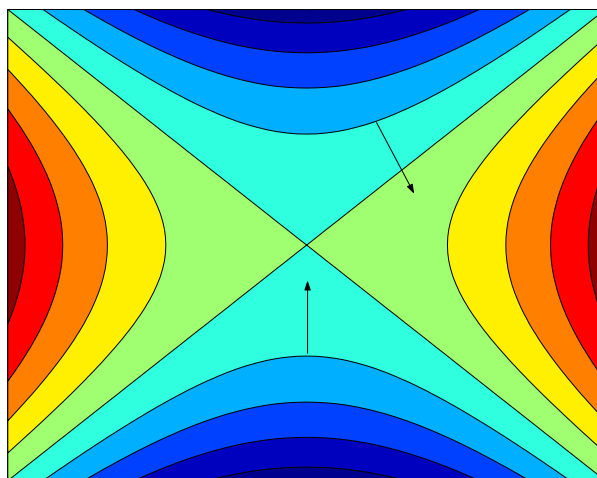


Figura – 2.2: Linee di livello di $f(x, y) = x^2 - y^2$.

può formalizzare come segue.

Teorema 2.1.12 *Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto, ed $f \in C^1(A)$. Se $x_0 \in E_c$, $\nabla f(x_0) \neq 0$ e $\varphi : (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}^n$ è di classe C^1 e tale che $\varphi(0) = x_0$, $\varphi(t) \in E_c$ per ogni $t \in (-\delta, \delta)$, allora $\nabla f(x_0) \cdot \varphi'(0) = 0$.*

DIM. La funzione $g : (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $g(t) = f(\varphi(t))$ è costante e vale c , sicché $g'(t) = \nabla f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = 0$ per ogni t . Per $t = 0$ si ha la tesi. QED

Esempio 2.1.13 Consideriamo la funzione di due variabili $f(x, y) = 9x^2 + 16y^2$ e consideriamo la curva di livello $f(x, y) = 25$. La funzione è differenziabile in \mathbb{R}^2 e il suo gradiente è $\nabla f(x, y) = (18x, 32y)$. Il versore normale nel punto $(1, 1)$, appartenente alla curva di livello considerata, è dato da $\frac{1}{\sqrt{337}}(9, 16)$.

È importante notare che il gradiente di una funzione (nei punti in cui non è nullo) determina la *direzione di massima pendenza*, nel senso che la derivata direzionale della funzione ha il massimo modulo lungo la direzione del gradiente, cioè:

$$\|\nabla f(x_0)\| = \max\{|D_v f(x_0)| : \|v\| = 1\}; \quad (2.1.5)$$

infatti, per ogni versore v risulta $D_v f(x_0) = \langle \nabla f(x_0), v \rangle$, e il prodotto scalare è massimo quando i due vettori sono paralleli, cioè quando $v = \nabla f(x_0) / \|\nabla f(x_0)\|$, e in tal caso vale la relazione (2.1.5).

Se f ammette derivate parziali non solo in un punto, ma in tutto un insieme aperto, per esempio A stesso, come nel caso di una variabile ci si può porre il problema dell'esistenza delle derivate parziali iterate (derivate successive, o di ordine superiore).

Definizione 2.1.14 *Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto, ed $f : A \rightarrow \mathbb{R}$; se esiste in A la derivata parziale $D_i f$, si dice che f ammette derivata parziale seconda rispetto ad x_j ed x_i se esiste la derivata parziale di $D_i f$ rispetto ad x_j , che in questo caso si denota $D_{ji} f$. In particolare, data f di classe $C^1(A)$, si dice che è di classe $C^2(A)$ se esistono tutte le derivate parziali seconde di f e sono continue in A .*

Iterando, si definisce la derivata parziale di ordine k di f rispetto ad $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}$ (nell'ordine), essendo i_1, \dots, i_k indici (anche ripetuti) in $\{1, \dots, n\}$, la derivata parziale rispetto ad x_{i_k} della $D_{i_{k-1} \dots i_1} f$. Si dice che f è di classe $C^k(A)$ se le sue derivate parziali esistono e sono continue in A fino all'ordine k .

Infine, si dice che f è di classe $C^\infty(A)$ se ammette derivate parziali di ogni ordine.

Notiamo che per $f \in C^1(A)$ le sue derivate parziali prime sono n e costituiscono un vettore (il gradiente), mentre le derivate seconde sono n^2 , le terze n^3 , eccetera. Le derivate seconde $D_{ij} f$ formano una matrice che è detta *matrice hessiana* di f ed è denotata

$$D^2 f = \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right\}.$$

Malgrado nella precedente definizione l'ordine in cui si eseguono le derivate sia essenziale per definire le derivate di ordine superiore, in molti casi il risultato dipende solo dalle variabili rispetto alle quali si deriva, e non dall'ordine delle operazioni.

Teorema 2.1.15 (Teorema di Schwarz) *Se $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ammette derivate parziali seconde $D_{ij} f$ e $D_{ji} f$ in un intorno di $x_0 \in A$, ed esse sono continue in x_0 , allora*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0).$$

Di conseguenza, se $f \in C^2(A)$ allora $D_{ij} f(x) = D_{ji} f(x)$ per ogni $x \in A$ e per ogni $i, j = 1, \dots, n$.

Si può riformulare l'ultima affermazione del precedente teorema dicendo che se $f \in C^2(A)$ allora $D^2 f$ è una matrice $n \times n$ simmetrica, cioè tale che $(D^2 f)_{ij} = D_{ij} f = D_{ji} f = (D^2 f)_{ji}$.

Osservazione 2.1.16 L'enunciato del Teorema di Schwarz si può naturalmente generalizzare alle derivate parziali di ordine superiore al secondo. Se $f \in C^k(A)$ allora tutte le sue derivate parziali, fino all'ordine k , dipendono solo dalle variabili coinvolte, e non dall'ordine in cui esse si considerano, e, se $f \in C^\infty(A)$, ciò vale per tutte le derivate parziali.

2.1.a La formula di Taylor

Come nel caso di una variabile, per ogni $x_0 \in A$ si può associare ad una funzione di classe $C^k(A)$ un polinomio di grado k tale che le sue derivate parziali in x_0 coincidano con quelle di f fino all'ordine k (polinomio di Taylor). Ci limitiamo a trattare il caso del secondo ordine.

Teorema 2.1.17 (Formula di Taylor del secondo ordine in più variabili) *Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto ed $f \in C^2(A)$. Se $x_0 \in A$ ed h è tale che tutto il segmento $[x_0, x_0 + h]$ sia contenuto in A , allora*

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)h_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)h_i h_j + o(\|h\|^2),$$

o, in forma vettoriale:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot h + \frac{1}{2} D^2 f(x_0) h \cdot h + o(\|h\|^2).$$

Osservazione 2.1.18 Come nel caso delle funzioni di una variabile, vale anche il Teorema di Taylor con il resto di Lagrange per funzioni di più variabili.

1. Nelle ipotesi del Teorema 2.1.17, posto $x = x_0 + h$, esiste un punto $\vartheta \in (0, 1)$ tale che

$$f(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2} D^2 f(x_0 + \vartheta(x - x_0)) (x - x_0) \cdot (x - x_0).$$

2. Se nel Teorema 2.1.17 si richiede solo $f \in C^1(A)$, posto $x = x_0 + h$, esiste un punto $\vartheta \in (0, 1)$ tale che

$$f(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0 + \vartheta(x - x_0)) \cdot (x - x_0).$$

Questa formula è l'analogo del Teorema di Lagrange per funzioni di più variabili.

3. (Esempio) Data la funzione di due variabili $f(x, y) = (1 + x)e^{x+y}$, è facile verificare che il polinomio di Taylor centrato in $(0, 0)$ di secondo grado è

$$T_2(x, y) = 1 + 2x + y + \frac{3}{2}x^2 + 2xy + \frac{1}{2}y^2.$$

La formula di Taylor del secondo ordine è lo strumento essenziale per studiare gli estremi relativi delle funzioni di più variabili che è l'argomento del paragrafo seguente.

2.2 Forme quadratiche ed estremi relativi

Per affrontare il problema della ricerca dei punti in cui una funzione assume valori di massimo o minimo relativo ricorriamo alla classificazione delle forme quadratiche in base alla loro *segnatura*. Come si è visto nel corso di Geometria ed Algebra alla matrice hessiana di una f di classe C^2 , fissato il punto x_0 , è associata la *forma quadratica simmetrica*

$$D^2f(x_0)h \cdot h = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) h_i h_j \quad h \in \mathbb{R}^n. \quad (2.2.6)$$

Presentiamo ora la classificazione delle forme quadratiche in base alla segnatura; useremo questa classificazione per la forma quadratica associata alla matrice hessiana nel Teorema 2.2.9.

Definizione 2.2.1 (Classificazione delle forme quadratiche) *Sia $A = (a_{ij})$ una matrice reale quadrata simmetrica di dimensione n , e β la forma quadratica ad essa associata. Diciamo che A (o, equivalentemente, β) è:*

<i>semidefinita positiva</i>	$\iff Ah \cdot h \geq 0 \quad \forall h \in \mathbb{R}^n$
<i>semidefinita negativa</i>	$\iff Ah \cdot h \leq 0 \quad \forall h \in \mathbb{R}^n$
<i>definita positiva</i>	$\iff Ah \cdot h > 0 \quad \forall h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$
<i>definita negativa</i>	$\iff Ah \cdot h < 0 \quad \forall h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$
<i>indefinita in tutti gli altri casi.</i>	

Notiamo che A è indefinita se e solo se esistono $h_1, h_2 \in \mathbb{R}^n$ tali che $Ah_1 \cdot h_1 > 0$, $Ah_2 \cdot h_2 < 0$. L'applicabilità concreta delle nozioni su esposte dipende evidentemente dalla facilità con cui si può determinare la segnatura di una forma quadratica data. Presentiamo un criterio diretto, basato sulla determinazione del segno degli autovalori di A , che, essendo A una matrice simmetrica, *sono tutti reali*.

Teorema 2.2.2 (Classificazione delle forme quadratiche con gli autovalori) *Sia A una matrice reale simmetrica, e siano $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ i suoi autovalori distinti. Allora A è:*

<i>semidefinita positiva</i>	$\iff \lambda_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, k$
<i>semidefinita negativa</i>	$\iff \lambda_i \leq 0 \quad \forall i = 1, \dots, k$
<i>definita positiva</i>	$\iff \lambda_i > 0 \quad \forall i = 1, \dots, k$
<i>definita negativa</i>	$\iff \lambda_i < 0 \quad \forall i = 1, \dots, k$
<i>indefinita</i>	$\iff \exists i, j \in \{1, \dots, k\} \text{ tali che } \lambda_i > 0, \lambda_j < 0.$

Osserviamo che nel precedente criterio ciò che importa è solo il *segno* degli autovalori di $D^2f(x_0)$ e non il loro valore numerico, ma vale la seguente proprietà.

Proposizione 2.2.3 *Sia A una matrice reale simmetrica, e siano $\lambda_1 < \dots < \lambda_k$ i suoi autovalori distinti. Allora:*

$$\begin{aligned} \text{se } A \text{ è definita positiva e } h \neq 0 \text{ risulta } & 0 < \lambda_1 \|h\|^2 \leq Ah \cdot h \leq \lambda_k \|h\|^2 \\ \text{se } A \text{ è definita negativa e } h \neq 0 \text{ risulta } & \lambda_1 \|h\|^2 \leq Ah \cdot h \leq \lambda_k \|h\|^2 < 0 \end{aligned}$$

Il seguente risultato dà condizioni affinché una forma quadratica sia definita positiva o negativa.

Teorema 2.2.4 (Criterio di Sylvester) *Sia A una matrice reale $n \times n$ e siano $A^{(p)}$ i minori di A fatti con le prime p righe e le prime p colonne. Allora A è definita positiva se e solo se*

$$\det(A^{(p)}) > 0 \quad \forall p = 1, \dots, n.$$

La matrice A è definita negativa se e solo se $-A$ è definita positiva, quindi se e solo se $(-1)^p \det(A^{(p)}) > 0$ per ogni p .

Utile è anche la seguente caratterizzazione delle matrici semidefinite attraverso il segno dei minori principali. Ricordiamo che i minori principali di una matrice A sono i determinanti delle matrici che si ottengono da A sopprimendo un numero arbitrario di righe e colonne con lo stesso indice.

Proposizione 2.2.5 *Sia A una matrice reale $n \times n$ tale che $\det A = 0$. Allora A è semidefinita positiva se e solo se tutti i suoi minori principali sono maggiori o uguali a zero.*

La matrice A è semidefinita negativa se e solo se $-A$ è semidefinita positiva, quindi se e solo se tutti i suoi minori principali di ordine pari sono maggiori o uguali a zero e tutti i suoi minori principali di ordine dispari sono minori o uguali a zero.

Passiamo ora alla definizione di estremo relativo, ed alla discussione della ricerca e classificazione degli estremi relativi.

Definizione 2.2.6 (Estremi relativi) *Siano $A \subset \mathbb{R}^n$, $x_0 \in A$ ed $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Diciamo che f ha un massimo relativo in x_0 se esiste $\delta > 0$ tale che*

$$x \in A, \quad \|x - x_0\| < \delta \quad \implies \quad f(x) \leq f(x_0);$$

diciamo che f ha un minimo relativo in x_0 se esiste $\delta > 0$ tale che

$$x \in A, \quad \|x - x_0\| < \delta \quad \implies \quad f(x) \geq f(x_0).$$

Se f ha un massimo o un minimo relativo in x_0 allora diciamo che ha un estremo relativo in x_0 . Se le due disequazioni precedenti valgono per $x \neq x_0$ con $<$ (risp. $>$) anziché \leq (risp. \geq) diciamo che l'estremo relativo è proprio.

Il seguente risultato estende il Teorema di Fermat.

Teorema 2.2.7 *Siano $A \subset \mathbb{R}^n$, $x_0 \in A$ e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Se x_0 è un punto di estremo relativo di f , x_0 è interno ad A ed f è differenziabile in x_0 , allora $\nabla f(x_0) = 0$.*

DIM. Fissato $v \in \mathbb{R}^n$, $\|v\| = 1$, possiamo applicare il Teorema di Fermat alla restrizione f_v di f alla retta $x = x_0 + tv$, che ha un estremo per $t = 0$, ottenendo $f'_v(0) = \nabla f(x_0) \cdot v = 0$. Poiché ciò accade per ogni vettore unitario v , deve essere $\nabla f(x_0) = 0$. \square

Definizione 2.2.8 (Punti critici) Se $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ è differenziabile in $x_0 \in A$ e $\nabla f(x_0) = 0$ allora x_0 si dice punto critico o stazionario per f . Un punto critico che non è né di massimo relativo né di minimo relativo si dice punto di sella.

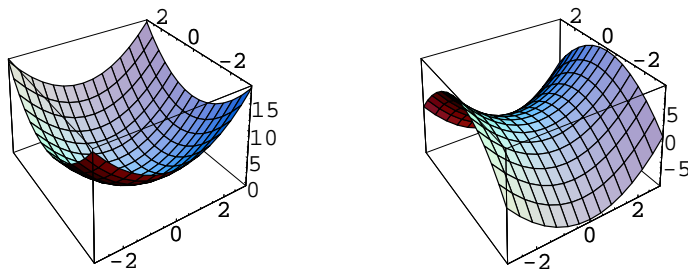


Figura – 2.3: Un punto di minimo relativo e un punto di sella.

Possiamo quindi dire che *ogni punto di estremo interno in cui f sia differenziabile è un punto critico*. Il viceversa, come nel caso di una variabile, non è vero. Per esempio, $f(x, y) = xy$ ha un punto critico nell'origine che non è né di massimo né di minimo. Infatti, $f(0, 0) = 0$, ma f assume valori positivi e negativi in ogni intorno dell'origine.

Per determinare gli estremi relativi di una funzione f si procede pertanto come nel caso di una variabile: se f è di classe C^1 se ne determinano i punti critici; se poi f è di classe C^2 , se ne calcolano le derivate seconde nei punti critici trovati e si cerca di determinare la natura dei punti critici usando la formula di Taylor del secondo ordine. Esistono, come nel caso $n = 1$, criteri basati sulle derivate di ordine più alto, ma, per l'elevata complessità (bisogna ricordare che le derivate parziali di ordine k sono n^k) non li discutiamo. La classificazione dei punti critici basata sulle derivate di ordine 2 è contenuta nel seguente teorema.

Teorema 2.2.9 (Classificazione dei punti critici) Siano A un sottoinsieme aperto di \mathbb{R}^n ed $f \in C^2(A)$. Se $x_0 \in A$ è un punto critico di f , valgono le seguenti condizioni necessarie di estimalità:

$$\begin{aligned} x_0 \text{ punto di minimo relativo} &\implies D^2f(x_0) \text{ semidefinita positiva} \\ x_0 \text{ punto di massimo relativo} &\implies D^2f(x_0) \text{ semidefinita negativa} \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

e le seguenti condizioni sufficienti:

$$\begin{aligned} D^2f(x_0) \text{ definita positiva} &\implies x_0 \text{ punto di minimo relativo proprio} \\ D^2f(x_0) \text{ definita negativa} &\implies x_0 \text{ punto di massimo relativo proprio} \\ D^2f(x_0) \text{ indefinita} &\implies x_0 \text{ punto di sella.} \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

DIM. Dimostriamo solo la condizione sufficiente di minimo relativo. Dalla formula di Taylor del secondo ordine sappiamo che

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot h + \frac{1}{2} D^2f(x_0) h \cdot h + o(\|h\|^2).$$

Poiché x_0 è un punto critico di f si ha $\nabla f(x_0) = 0$ e poichè la matrice hessiana in x_0 è definita positiva, per la Proposizione 2.2.3 esiste una costante $\lambda > 0$ tale che

$$D^2 f(x_0)h \cdot h \geq \lambda \|h\|^2.$$

Allora scelto $\delta > 0$ tale che per ogni h con $0 < \|h\| < \delta$ risulti $\frac{|o(\|h\|^2)|}{\|h\|^2} \leq \frac{\lambda}{4}$ si ha

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{1}{2} D^2 f(x_0)h \cdot h + o(\|h\|^2) \geq f(x_0) + \frac{\lambda}{2} \|h\|^2 - \frac{\lambda}{4} \|h\|^2 = f(x_0) + \frac{\lambda}{4} \|h\|^2.$$

Dunque x_0 è punto di minimo proprio nell'intorno $B_\delta(x_0)$. \square

Dal Teorema 2.2.2 segue una formulazione equivalente del risultato precedente, in termini degli autovalori della matrice hessiana.

Teorema 2.2.10 (Classificazione dei punti critici con gli autovalori) *Siano A un sottoinsieme aperto di \mathbb{R}^n , $f \in C^2(A)$, ed $x_0 \in A$ un punto critico di f . Siano inoltre $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ gli autovalori distinti di $D^2 f(x_0)$. Valgono le seguenti condizioni necessarie di estremalità:*

$$\begin{aligned} x_0 \text{ punto di minimo relativo} &\implies \lambda_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, k; \\ x_0 \text{ punto di massimo relativo} &\implies \lambda_i \leq 0 \quad \forall i = 1, \dots, k. \end{aligned}$$

e le seguenti condizioni sufficienti:

$$\begin{aligned} \lambda_i > 0 \quad \forall i = 1, \dots, k &\implies x_0 \text{ punto di minimo relativo proprio} \\ \lambda_i < 0 \quad \forall i = 1, \dots, k &\implies x_0 \text{ punto di massimo relativo proprio} \\ \exists i, j \in \{1, \dots, k\} \text{ tali che } \lambda_i > 0, \lambda_j < 0 &\implies x_0 \text{ punto di sella.} \end{aligned}$$

Nel caso $n = 2$ possiamo ricavare in modo elementare il contenuto del Criterio di Sylvester 2.2.4 ed applicarlo alla classificazione di un punto critico in modo molto semplice.

Esempio 2.2.11 Sia $A = (a_{ij})$ una matrice simmetrica 2×2 . Allora, l'equazione da risolvere per determinare gli autovalori è

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + \det A = 0.$$

Ne segue che

$$\begin{aligned} A \text{ è definita positiva} &\iff \det A > 0, \quad a_{11} > 0 \\ A \text{ è definita negativa} &\iff \det A > 0, \quad a_{11} < 0 \\ A \text{ è indefinita} &\iff \det A < 0 \\ A \text{ è semidefinita} &\iff \det A = 0. \end{aligned}$$

Siccome il determinante di una matrice è uguale al prodotto degli autovalori, le affermazioni relative ai casi indefinito e semidefinito sono ovvie. Per quanto riguarda il caso

di A definita (positiva o negativa), cioè con i due autovalori concordi, è ovvio che il determinante di A debba essere positivo; d'altra parte, questo implica che a_{11} e a_{22} siano concordi, essendo $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$. Quindi, ci sono due autovalori positivi se e solo se nell'equazione sono presenti due *variazioni* di segno nei coefficienti (cioè, $a_{11} > 0$ e $a_{22} > 0$), e ci sono due autovalori negativi se e solo se nell'equazione sono presenti due *permanenze* di segno nei coefficienti (cioè, $a_{11} < 0$ e $a_{22} < 0$).

In termini di punti di estremi relativi, se (x_0, y_0) è un punto critico interno di una funzione di classe C^2 di due variabili, si può stabilire il criterio seguente:

$$\begin{aligned} \det D^2 f(x_0, y_0) > 0, \quad D_{xx} f(x_0, y_0) > 0 &\Rightarrow (x_0, y_0) \text{ punto di minimo relativo proprio} \\ \det D^2 f(x_0, y_0) > 0, \quad D_{xx} f(x_0, y_0) < 0 &\Rightarrow (x_0, y_0) \text{ punto di massimo relativo proprio} \\ \det D^2 f(x_0, y_0) < 0 &\Rightarrow (x_0, y_0) \text{ è punto di sella.} \end{aligned}$$

Osservazione 2.2.12 (Funzioni convesse) Anche per le funzioni di più variabili si definisce la nozione di funzione convessa. Dato $A \subset \mathbb{R}^n$ insieme *convesso* una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ si dice *convessa* se per ogni coppia di punti $x, y \in A$ risulta

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) \quad \forall t \in [0, 1],$$

si dice strettamente convessa se vale la disuguaglianza con $<$ per ogni $t \in (0, 1)$. Ad esempio $f(x, y) = x^2 + y^2$ è strettamente convessa, mentre $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ è solo convessa.

Sia A un aperto convesso. Valgono le seguenti caratterizzazioni:

1. La funzione f è convessa se e solo se il suo sopragrafico è un insieme convesso in \mathbb{R}^{n+1} .
2. Se $f \in C^1(A)$ allora è convessa se e solo se per ogni $x_0 \in A$ risulta

$$f(x) \geq f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0) \quad \forall x \in A,$$

ossia, per ogni punto x_0 il grafico di f è sopra il grafico del piano tangente in x_0 .

3. Se $f \in C^2(A)$ allora è convessa se e solo se la matrice hessiana $D^2 f(x)$ è semidefinita positiva per ogni $x \in A$.

Dalla proprietà 2 segue che se f è strettamente convessa e x_0 è un punto critico, allora esso è l'unico punto di minimo assoluto di f in A .

Una funzione f si dice concava se $-f$ è convessa.

2.3 Funzioni vettoriali

In questo paragrafo estendiamo i concetti del calcolo differenziale al caso delle funzioni di più variabili a valori in \mathbb{R}^k , con $k \geq 2$. Come abbiamo già visto nel Capitolo 1 per le funzioni vettoriali di una variabile, non ci sono grosse novità concettuali, dal momento che si può procedere ragionando sulle singole componenti.

Definizione 2.3.1 (Matrice jacobiana e differenziale) Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto, sia $x_0 \in A$ e sia $F : A \rightarrow \mathbb{R}^k$; indichiamo con $F_i : A \rightarrow \mathbb{R}$, per $i = 1, \dots, k$, le sue componenti. Se esistono tutte le derivate parziali $D_j F_i(x_0)$, per $j = 1, \dots, n$ e $i = 1, \dots, k$ si definisce la matrice jacobiana di F in x_0 ponendo

$$DF(x_0) = \begin{pmatrix} D_{x_1} F_1 & D_{x_2} F_1 & \dots & D_{x_n} F_1 \\ D_{x_1} F_2 & D_{x_2} F_2 & \dots & D_{x_n} F_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{x_1} F_k & D_{x_2} F_k & \dots & D_{x_n} F_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla F_1 \\ \nabla F_2 \\ \vdots \\ \nabla F_k \end{pmatrix}.$$

Diciamo che F è di classe $C^1(A)$ se ha derivate parziali prime $D_j F = (D_j F_1, \dots, D_j F_k)$ continue in A , e diciamo che F è differenziabile in x_0 se esiste un'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ tale che

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0) - L(h)}{\|h\|} = 0. \quad (2.3.9)$$

La matrice jacobiana di F è quindi una matrice con k righe ed n colonne dove la i -esima riga ha per elementi le componenti del gradiente di F_i , e la j -esima colonna ha per elementi le derivate parziali delle componenti rispetto ad x_j . Si estende in modo naturale anche la nozione di derivata direzionale in x_0 lungo la direzione del vettore $v \in \mathbb{R}^n$, con $\|v\| = 1$, imponendo l'esistenza del limite

$$D_v F(x_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + tv) - F(x_0)}{t}$$

che questa volta (se esiste) è un vettore di \mathbb{R}^k . Anche nel caso delle derivate direzionali, $D_v F(x_0)$ esiste se e solo se $D_v F_i(x_0)$ esiste per ogni $i = 1, \dots, k$ e

$$D_v F(x_0) = (D_v F_1(x_0), \dots, D_v F_k(x_0)).$$

Si può riformulare l'eguaglianza precedente dicendo che per ogni vettore $w \in \mathbb{R}^k$ si ha $D_v(F \cdot w)(x_0) = D_v F(x_0) \cdot w$. In modo analogo si possono introdurre gli operatori differenziali di ordine più alto, e sempre ragionando componente per componente ottenere il teorema di Schwarz.

Come abbiamo già preannunziato, la verifica della differenziabilità si esegue componente per componente. Infatti, il numeratore al primo membro della (2.3.9) è un vettore, e la frazione tende a zero se e solo se le componenti di tale vettore tendono a zero.

Proposizione 2.3.2 Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto, sia $x_0 \in A$ e sia $F : A \rightarrow \mathbb{R}^k$; allora, F è differenziabile in x_0 se e solo se le sue componenti lo sono, e, se F è differenziabile in x_0 allora l'applicazione lineare L in (2.3.9) è unica ed è associata alla matrice jacobiana di F . Inoltre, se $F \in C^1(A)$ allora F è differenziabile in tutti i punti di A .

Esempio 2.3.3 Se $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ è di classe $C^2(A)$ allora la funzione vettoriale $F = \nabla f$ è di classe $C^1(A)$ e $DF = D^2 f$, cioè la matrice jacobiana di F è la matrice hessiana di f .

Possiamo ora enunciare la naturale generalizzazione del teorema di derivazione delle funzioni composte.

Teorema 2.3.4 (Differenziale della funzione composta, caso vettoriale) *Siano $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^k$ aperti, $F : A \rightarrow B$ e $G : B \rightarrow \mathbb{R}^p$. Sia $x_0 \in A$ e supponiamo che F sia differenziabile in x_0 e G sia differenziabile in $F(x_0)$. Allora $\Phi = G \circ F$ è differenziabile in x_0 e vale la formula*

$$D\Phi(x_0) = DG(F(x_0))DF(x_0),$$

ove il prodotto è il prodotto “righe per colonne” delle matrici.

Osservazioni 2.3.5

1. Posto $F = (F_1, \dots, F_k)$, $G = (G_1, \dots, G_p)$, $\Phi_r = G_r \circ F$, la formula di derivazione si può scrivere nel seguente modo:

$$\frac{\partial \Phi_r}{\partial x_j}(x_0) = \sum_{i=1}^k \frac{\partial G_r}{\partial y_i}(F(x_0)) \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x_0) \quad j = 1, \dots, n, \quad r = 1, \dots, p.$$

Osserviamo anche che la formula sopra, pur avendo senso, potrebbe essere falsa se F e G fossero solo dotate di derivate parziali, ma non differenziabili.

2. Vediamo ora due casi particolari della formula di differenziazione della funzione composta che ricorrono spesso nelle applicazioni. Se $k = p = 1$, allora G è una funzione reale di variabile reale e F , Φ sono funzioni reali di n variabili. In tal caso

$$\nabla \Phi(x_0) = G'(F(x_0))\nabla F(x_0).$$

Se $n = p = 1$, allora F è una funzione vettoriale di variabile reale (quindi DF è un vettore colonna) e G è una funzione reale di k variabili (quindi $DG = \nabla G$ è un vettore riga). La funzione composta $\Phi(x) = G(F_1(x), \dots, F_k(x))$, $x \in A \subset \mathbb{R}$, è a valori in \mathbb{R} e Φ' è data dal prodotto scalare

$$\Phi'(x_0) = \nabla G(F(x_0)) \cdot F'(x_0) = \sum_{i=1}^k \frac{\partial G}{\partial y_i}(F(x_0)) F'_i(x_0).$$

3. Con gli stessi metodi qui visti si potrebbero trattare funzioni $F : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m,k}$ a valori matrici. Basta infatti identificare $\mathbb{R}^{m,k}$ con \mathbb{R}^{mk} e vedere quindi tali F come mappe vettoriali a valori in \mathbb{R}^{mk} . Ragionando componente per componente, si introducono quindi le derivate parziali, il gradiente, il differenziale.

Tra le applicazioni vettoriali rivestono particolare importanza i *cambiamenti di coordinate* in \mathbb{R}^n , di cui discutiamo ora i principali esempi.

Esempi 2.3.6 (Cambiamenti di coordinate)

1. **(Trasformazioni lineari)** Sia $A = (a_{ij})$ una matrice reale $n \times n$ con $\det A \neq 0$. Allora, com'è noto dall'algebra lineare, essa rappresenta, rispetto alla base canonica di \mathbb{R}^n , un'applicazione lineare invertibile di \mathbb{R}^n in sé (*automorfismo di spazi vettoriali*). Il vettore e_j della base canonica viene trasformato nel vettore $e'_j = (a_{1j}, \dots, a_{nj})$ che ha per componenti gli elementi della j -esima colonna della matrice A . I vettori e'_1, \dots, e'_n costituiscono a loro volta una base di \mathbb{R}^n , essendo, per l'ipotesi $\det A \neq 0$, linearmente indipendenti. Ogni vettore di \mathbb{R}^n si può quindi esprimere come combinazione lineare degli e'_i , ed ha, rispetto a questa nuova base, componente i -esima data da $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$. In termini analitici, consideriamo la funzione vettoriale $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ di componenti F_i date da

$$F_i(x) = \sum_{h=1}^n a_{ih}x_h, \quad i = 1, \dots, n.$$

Le F_i sono lineari, dunque differenziabili per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, e un calcolo diretto mostra che $DF(x) = A$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, cioè $D_j F_i(x) = a_{ij}$ per ogni i, j .

2. **(Coordinate polari piane)** Nel piano \mathbb{R}^2 , oltre alle coordinate cartesiane, si possono introdurre altri sistemi di coordinate. Le coordinate polari (ϱ, ϑ) sono particolarmente utili per studiare problemi con qualche simmetria rispetto ad un punto, che si assume essere l'origine delle coordinate. Geometricamente, $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$ rappresenta la distanza del punto generico di coordinate cartesiane (x, y) dall'origine, mentre ϑ rappresenta uno dei due angoli formati dalla semiretta di origine $(0, 0)$ e passante per (x, y) con il semiasse $\{x \geq 0, y = 0\}$. Fissato un criterio univoco per la scelta dell'angolo, il punto $(x, y) \neq (0, 0)$ è univocamente determinato da una coppia (ϱ, ϑ) , con $\varrho \geq 0$ e ϑ che varia in un intervallo semiaperto di ampiezza 2π . Fa eccezione l'origine, che è determinato dal valore $\varrho = 0$, ma non ha un ϑ determinato. Scegliamo come angolo quello spazzato dal semiasse positivo delle ascisse mentre ruota in senso antiorario fino a sovrapporsi alla semiretta per l'origine passante per (x, y) , e come intervallo di variabilità per l'angolo l'intervallo $[0, 2\pi[$, così che valgano le relazioni:

$$\begin{cases} x = \varrho \cos \vartheta \\ y = \varrho \sin \vartheta \end{cases} \quad (2.3.10)$$

Detta $F: [0, +\infty[\times [0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}^2$ la funzione che a (ϱ, ϑ) associa (x, y) , un calcolo diretto mostra che

$$DF(\varrho, \vartheta) = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\varrho \sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \varrho \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

da cui, in particolare, $\det DF(\varrho, \vartheta) = \varrho$.

3. **(Coordinate cilindriche)** Come nel piano, in \mathbb{R}^3 si possono introdurre coordinate diverse dalle cartesiane (x, y, z) ; in presenza di simmetrie rispetto ad un asse, che supponiamo essere l'asse z , può essere conveniente usare coordinate cilindriche

(ϱ, ϑ, z) . Queste si ottengono semplicemente considerando coordinate polari nel piano (x, y) :

$$\begin{cases} x = \varrho \cos \vartheta \\ y = \varrho \sin \vartheta \\ z = z \end{cases} \quad (2.3.11)$$

Detta $F : [0, +\infty[\times [0, 2\pi[\times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ la funzione che a (ϱ, ϑ, z) associa (x, y, z) , un calcolo diretto mostra che

$$DF(\varrho, \vartheta, z) = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\varrho \sin \vartheta & 0 \\ \sin \vartheta & \varrho \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

da cui, in particolare, $\det DF(\varrho, \vartheta, z) = \varrho$.

4. **(Coordinate sferiche)** In \mathbb{R}^3 , per esempio in presenza di una simmetria rispetto ad un punto, che assumiamo essere l'origine, può essere conveniente usare coordinate sferiche $(\varrho, \phi, \vartheta)$, dove, da un punto di vista geometrico, ϱ rappresenta la distanza del punto generico $P(x, y, z)$ dall'origine, ϕ l'angolo formato dalla semiretta di origine $(0, 0, 0)$ e passante per P con il semiasse $\{x = 0, y = 0, z \geq 0\}$, ϑ la coordinata polare del punto (x, y) (proiezione di P sul piano (x, y)). Ne segue che $\varrho \geq 0$, e (per esempio) $\phi \in [0, \pi]$, $\vartheta \in [0, 2\pi[$. Posto $F : [0, +\infty[\times [0, 2\pi[\times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$, si ha:

$$\begin{cases} x = \varrho \sin \phi \cos \vartheta \\ y = \varrho \sin \phi \sin \vartheta \\ z = \varrho \cos \phi \end{cases}$$

e quindi

$$DF(\varrho, \vartheta, \phi) = \begin{pmatrix} \sin \phi \cos \vartheta & \varrho \cos \phi \cos \vartheta & -\varrho \sin \phi \sin \vartheta \\ \sin \phi \sin \vartheta & \varrho \cos \phi \sin \vartheta & \varrho \sin \phi \cos \vartheta \\ \cos \phi & -\varrho \sin \phi & 0 \end{pmatrix}$$

da cui, in particolare, $\det DF(\varrho, \vartheta, \phi) = \varrho^2 \sin \phi$.

2.4 Estremi vincolati

In questo paragrafo studiamo il problema della ricerca dei punti di estremo relativo più in generale rispetto al caso di estremi *interni*. Questo problema è di grande importanza nelle applicazioni, perché nei problemi concreti di *ottimizzazione* ci sono sempre dei *vincoli* da rispettare, nel senso che si ha interesse a confrontare fra loro i valori che una funzione data assume su un sottoinsieme del suo dominio (il vincolo) che in generale non è un insieme aperto.

Definizione 2.4.1 (Estremi vincolati) Siano $A \subset \mathbb{R}^n$, $S \subset \mathbb{R}^n$, $x_0 \in A \cap S$ ed $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Diciamo che f ha un massimo relativo in x_0 rispetto al vincolo S se esiste $\delta > 0$ tale che

$$x \in A \cap S, \quad \|x - x_0\| < \delta \quad \implies \quad f(x) \leq f(x_0);$$

diciamo che f ha un minimo relativo in x_0 rispetto al vincolo S se esiste $\delta > 0$ tale che

$$x \in A \cap S, \quad \|x - x_0\| < \delta \quad \implies \quad f(x) \geq f(x_0).$$

Se f ha un massimo o un minimo relativo in x_0 rispetto al vincolo S allora diciamo che ha un estremo relativo in x_0 rispetto al vincolo S . Se le due disuguaglianze precedenti valgono per $x \neq x_0$ con $<$ (risp. $>$) anziché \leq (risp. \geq) diciamo che l'estremo relativo è proprio.

Il problema della determinazione degli estremi relativi vincolati con un vincolo qualsiasi è troppo generale per poter essere affrontato con un metodo generale. Ci limiteremo al caso in cui il vincolo S è un sottoinsieme di \mathbb{R}^n descritto da funzioni regolari. In accordo con la discussione alla fine del Paragrafo 2.1, questo significa che S è l'immagine oppure un insieme di livello di una funzione regolare. Corrispondentemente, esponiamo due metodi per studiare il problema della ricerca degli estremi su S . Entrambi questi metodi consentono di ricondurre la ricerca degli estremi vincolati alla ricerca di estremi non vincolati di opportune funzioni ausiliarie. Per fissare le idee, supponiamo che sia data $f \in C^1(A)$, con $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto, e che S sia un vincolo di dimensione $k < n$ in \mathbb{R}^n . Il nostro problema è: determinare gli estremi relativi di f vincolati su S .

Primo metodo (parametrizzazione del vincolo) Supponiamo che il vincolo sia dato nella forma

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : x = \varphi(t), t \in D\},$$

dove $D \subset \mathbb{R}^k$ è una insieme aperto e $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ è una funzione di classe C^1 in D . In questo caso, per determinare gli estremi relativi di f basta studiare la funzione composta $g = f \circ \varphi$ sull'insieme aperto $D \subset \mathbb{R}^k$, con i metodi già visti.

Secondo metodo (moltiplicatori di Lagrange) Supponiamo che il vincolo sia dato nella forma implicita

$$S = \{x \in A : F(x) = 0\},$$

cioè come insieme di livello di una funzione $F : A \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ di classe $C^1(A)$. Notiamo che, essendo F a valori vettoriali, il suo insieme di livello S è l'intersezione degli insiemi di livello $S_i = \{x : F_i(x) = 0\}$, per $i = 1, \dots, n-k$, e supponiamo che la matrice DF abbia su S rango massimo $n-k$. In questo caso, si introduce la funzione ausiliaria

$$\Phi(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-k}) = f(x) - \sum_{i=1}^{n-k} \lambda_i F_i(x),$$

che dipende dalla variabile $x \in A$ e dalle variabili reali anch'esse ausiliarie (dette *moltiplicatori di Lagrange*) $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-k}$ e se ne cercano gli estremi *non vincolati* in $A \times \mathbb{R}^{n-k}$. Vale infatti il seguente risultato:

Se $x \in A$ è un estremo vincolato di f su S allora esistono numeri reali $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-k}$ tali che il punto $(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-k}) \in A \times \mathbb{R}^{n-k}$ sia estremo relativo di Φ .

Osserviamo che quindi il metodo esposto fornisce solo una condizione necessaria di estremalità: per cercare gli estremi relativi di Φ si annulla il gradiente di Φ , cioè si risolve il sistema

$$\begin{cases} D_{x_1} \Phi(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-k}) = 0 \\ \vdots \\ D_{x_n} \Phi(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-k}) = 0 \\ D_{\lambda_1} \Phi(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-k}) = 0 \\ \vdots \\ D_{\lambda_{n-k}} \Phi(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-k}) = 0, \end{cases}$$

che si può riscrivere:

$$\begin{cases} D_{x_1} f(x) - \sum_{i=1}^{n-k} \lambda_i D_{x_1} F_i(x) = 0 \\ \vdots \\ D_{x_n} f(x) - \sum_{i=1}^{n-k} \lambda_i D_{x_n} F_i(x) = 0 \\ F_1(x) = 0 \\ \vdots \\ F_{n-k}(x) = 0. \end{cases}$$

I punti di estremo di Φ sono allora soluzioni di questo sistema, ma non tutte le soluzioni sono punti di estremo. Di conseguenza, lo stesso vale per gli estremi vincolati di f su S . Notiamo che le ultime equazioni del precedente sistema assicurano che i punti trovati appartengano ad S . Le prime n equazioni, invece, possono essere interpretate geometricamente dicendo che nei punti di estremo vincolato *il gradiente di f non ha componenti tangenti ad S* . Infatti, il gradiente risulta combinazione lineare dei gradienti delle F_1, \dots, F_{n-k} , che, per il Teorema 2.1.12, non hanno componenti tangenziali lungo S .

CAPITOLO 3

CURVE ED INTEGRALI DI LINEA

In questo capitolo introduciamo la nozione di curva nello spazio \mathbb{R}^n , ne studiamo le più elementari proprietà geometriche, come la lunghezza e la retta tangente, e definiamo gli integrali di linea di funzioni reali e di campi vettoriali. Quest'ultima nozione verrà usata per affrontare il problema della caratterizzazione dei campi vettoriali F che sono gradienti di una funzione regolare.

La nozione di curva presenta in modo naturale due aspetti, uno *geometrico* (la curva come insieme di punti), l'altro *cinematico* (la curva come traiettoria di un punto materiale in movimento). Privilegeremo questo secondo aspetto, definendo le curve come funzioni (in termini cinematici, leggi di moto), dal momento che l'informazione contenuta nella funzione che definisce un luogo geometrico non è tutta desumibile dalle proprietà insiemistiche del luogo stesso. D'altra parte, avremo cura di segnalare le proprietà dei luoghi geometrici che non dipendono dalla funzione che li rappresenta.

3.1 Curve regolari

Nella prima definizione precisiamo che cosa s'intende per curva in \mathbb{R}^n , ed introduciamo la nomenclatura fondamentale per le sue proprietà.

Definizione 3.1.1 (Curve) Siano $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo e $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Diciamo che φ è una curva in \mathbb{R}^n se è una funzione continua.

Diciamo che φ è una curva regolare se $\varphi \in C^1(I)$ e $\varphi'(t) \neq 0$ per ogni $t \in I$.

Diciamo che φ è una curva regolare a tratti se è continua ed esistono $\inf I = t_0 < t_1 < \dots < t_k = \sup I$ tali che φ sia regolare in $[t_{i-1}, t_i] \cap I$ per ogni $i = 1, \dots, k$.

Chiamiamo sostegno della curva φ l'insieme $\varphi(I) \subset \mathbb{R}^n$, e lo denotiamo φ^* .

Diciamo che φ è semplice se $t_1 \neq t_2$ implica $\varphi(t_1) \neq \varphi(t_2)$, purché almeno uno tra t_1 e t_2 sia interno ad I .

Se $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ diciamo che il punto $\varphi(a)$ è il primo estremo e $\varphi(b)$ è il secondo estremo di φ .

Diciamo che φ è chiusa se $I = [a, b]$ è chiuso e limitato e $\varphi(a) = \varphi(b)$. Una curva chiusa si dice anche circuito.

Osservazioni 3.1.2

1. Come spiegato nell'introduzione al capitolo, abbiamo identificato una curva con la parametrizzazione; il luogo geometrico descritto dalla curva è quello che abbiamo chiamato il suo sostegno.
2. La condizione $\varphi'(t) \neq 0$ sarà utile per definire in ogni punto del sostegno φ^* della curva φ la retta tangente (vedi l'equazione (3.1.1) che definisce la retta tangente).
3. Nella definizione di curva semplice abbiamo escluso il caso che t_1 e t_2 siano *entrambi* estremi dell'intervallo I perché vogliamo che una curva semplice non abbia punti doppi, ma ammettiamo che possa essere allo stesso tempo semplice e chiusa (come una circonferenza, vedi esempio 3.1.3.2), non considerando il primo estremo (che coincide col secondo estremo) come punto doppio. Notiamo anche che gli estremi di una curva dipendono dalla parametrizzazione e non solo dal sostegno (vedi successivo esempio 3.1.3.2).
4. Se una curva è regolare a tratti allora nei punti in cui la regolarità viene meno esistono le derivate destra e sinistra.

Presentiamo subito alcuni esempi di curve.

Esempi 3.1.3

1. **(Segmenti, rette, poligonali)** Ricordiamo (vedi Definizione 1.1.18) che il segmento $[x, y]$ di estremi x ed y è la curva $\varphi(t) = x + t(y - x)$, per $t \in [0, 1]$. Dati un punto $x \in \mathbb{R}^n$ ed un vettore $v \neq 0$ in \mathbb{R}^n , la curva $\varphi(t) = x + tv$, per $t \in \mathbb{R}$, è la retta passante per x di direzione v . Ricordiamo che le poligonali sono già state introdotte nel Capitolo 1 (vedi Definizione 1.1.18). Una parametrizzazione della poligonale P di vertici x_0, \dots, x_k può essere $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ definita da:

$$\varphi(t) = x_{i-1} + k(t - t_{i-1})(x_i - x_{i-1}) \quad \text{per} \quad t_{i-1} = \frac{i-1}{k} \leq t \leq \frac{i}{k} = t_i, \quad i = 1, \dots, k.$$

2. **(Circonferenza)** La curva $\varphi(t) = (R \cos t, R \sin t)$, per $t \in [0, 2\pi]$, è la circonferenza di centro l'origine e raggio R *percorsa una volta in senso antiorario*. È una curva semplice e chiusa, ma queste proprietà dipendono dall'espressione della funzione φ ed anche dall'intervallo di definizione. Infatti, se t varia in $[0, 3\pi]$ la curva non è più né semplice né chiusa, pur avendo come sostegno la stessa circonferenza.
3. **(Ellisse)** Più in generale, si può considerare l'ellisse di centro l'origine e semiassi a e b , descritta da $\varphi(t) = (a \cos t, b \sin t)$, per $t \in [0, 2\pi]$. Ovviamente, se $a = b = R$ si ottiene la circonferenza dell'esempio 2.
4. **(Elica)** Consideriamo la curva in \mathbb{R}^3 data da

$$\varphi(t) = (\cos t, \sin t, t), \quad \text{per } t \in [0, 4\pi].$$

Come abbiamo detto, vogliamo distinguere curve che, pur avendo lo stesso sostegno, sono descritte da funzioni diverse. In realtà molte proprietà di due curve permangono immutate se fra esse esiste il legame precisato dalla seguente definizione.

Definizione 3.1.4 (Curve equivalenti) Due curve $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\psi : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ si dicono equivalenti se esiste una funzione surgettiva $\alpha : I \rightarrow J$ di classe $C^1(I)$ con $\alpha'(t) \neq 0$ per ogni $t \in I$ tale che $\varphi = \psi \circ \alpha$.

Osservazioni 3.1.5

1. La funzione α nella definizione precedente sarà detta talvolta *cambiamento di parametro ammissibile*.
2. È utile osservare che ogni curva definita in un intervallo chiuso e limitato $I = [a, b]$ è equivalente ad una curva definita nell'intervallo unitario $J = [0, 1]$, attraverso il cambiamento di parametro $\alpha(t) = \frac{t-a}{b-a}$.
3. La relazione introdotta è una relazione di equivalenza, cioè *riflessiva* (ogni curva è equivalente a sé stessa), *simmetrica* (se φ è equivalente a ψ allora ψ è equivalente a φ , con cambiamento di parametro la funzione inversa di α , cioè $\alpha^{-1} : J \rightarrow I$) e *transitiva* (se φ è equivalente a ψ con cambiamento di parametro $\alpha : I \rightarrow J$ e ψ è equivalente a $\zeta : K \rightarrow \mathbb{R}^n$ con cambiamento di parametro $\beta : J \rightarrow K$ allora φ è equivalente a ζ , con cambiamento di parametro la funzione composta $\beta \circ \alpha : I \rightarrow K$).
4. La condizione che α' sia continua nell'intervallo I e mai nulla implica che ha un segno costante, cioè che $\alpha'(t) > 0$ per ogni $t \in I$, oppure $\alpha'(t) < 0$ per ogni $t \in I$. Nel primo caso φ e ψ hanno la stessa *orientazione*, vengono percorse cioè nello stesso verso, nel secondo in verso opposto. Ne segue che ogni classe di equivalenza di curve si spezza in due sottoclassi, dette *curve orientate*. Due rappresentanti della stessa curva orientata sono equivalenti con un cambiamento di parametro ammissibile crescente, mentre si passa dal rappresentante di una sottoclasse a quello dell'altra con un cambiamento di parametro ammissibile decrescente.
5. Due curve equivalenti hanno gli stessi estremi, nello stesso ordine se hanno la stessa orientazione, in ordine inverso se hanno orientazione opposta.
6. Se $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ è una curva regolare si può ottenere una curva con orientazione opposta considerando $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ definita da $\psi(t) = \varphi(a + b - t)$.

Cerchiamo ora una formula per la parametrizzazione della retta tangente ad una curva in un punto del suo sostegno, imponendo che sia la “retta limite” delle secanti. Se $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ è una curva semplice e regolare, fissato $t_0 \in I$, per ogni $t_1 \neq t_0$ si può scrivere l'equazione $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ della retta secante nei punti $\varphi(t_0)$ e $\varphi(t_1)$; come nell'esempio

3.1.3.1, la direzione della retta è il vettore $\varphi(t_1) - \varphi(t_0)$ e, imponendo che $\psi(t_0) = \varphi(t_0)$ e $\psi(t_1) = \varphi(t_1)$ si ha

$$\psi(t) = \varphi(t_0) + \frac{\varphi(t_1) - \varphi(t_0)}{t_1 - t_0}(t - t_0).$$

Passando al limite per $t_1 \rightarrow t_0$ si ottiene l'equazione della retta tangente a φ in $\varphi(t_0)$, data da:

$$\psi(t) = \varphi(t_0) + \varphi'(t_0)(t - t_0). \quad (3.1.1)$$

Il versore $T(t) = \varphi'(t)/\|\varphi'(t)\|$ si dice versore tangente a φ nel punto $\varphi(t)$ e dipende solo dalla curva orientata a cui appartiene φ (vedi Osservazione 3.1.5.4). Notiamo che, essendo φ regolare per ipotesi, T è ben definito.

Esempio 3.1.6 (Curve cartesiane) Se $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continua, il suo grafico è il sostegno di una curva in \mathbb{R}^2 che si può rappresentare canonicamente con $\varphi(t) = (t, f(t))$, $t \in (a, b)$. Se $f \in C^1(a, b)$ l'equazione (3.1.1), per $t_0 = x_0$, diviene allora, scrivendo separatamente le due componenti,

$$\begin{cases} x = \psi_1(t) = \varphi_1(t_0) + \varphi'_1(t_0)(t - t_0) = t \\ y = \psi_2(t) = \varphi_2(t_0) + \varphi'_2(t_0)(t - t_0) = f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0) \end{cases}$$

da cui, eliminando il parametro t , $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, che è l'equazione già trovata per le funzioni di una variabile.

Passiamo ora a definire la *lunghezza di una curva* ed a dimostrare una formula per il suo calcolo. Definiamo prima la lunghezza di un segmento, poi di una poligonale, e poi di una curva generica.

Definizione 3.1.7 (Lunghezza di una curva) La lunghezza del segmento $[x, y]$ è

$$\ell([x, y]) = \|x - y\|.$$

La lunghezza della poligonale P di vertici x_0, \dots, x_k è

$$\ell(P) = \sum_{i=1}^k \|x_i - x_{i-1}\|.$$

Data $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, si dice che la poligonale P di vertici x_0, \dots, x_k è inscritta nella curva φ se esistono $t_0 < \dots < t_k \in I$ tali che $x_i = \varphi(t_i)$ per $i = 0, 1, \dots, k$. Definiamo la lunghezza della curva φ ponendo

$$\ell(\varphi, I) = \sup\{\ell(P) : P \text{ poligonale inscritta in } \varphi\}.$$

Se $\ell(\varphi, I) < +\infty$ allora diciamo che φ è rettificabile. Se $\ell(\varphi, [a, b]) < +\infty$ per ogni $[a, b] \subset I$ allora φ si dice localmente rettificabile.

Per ottenere una formula che fornisca la lunghezza di una curva direttamente dalla sua rappresentazione parametrica, introduciamo la funzione che ad ogni valore di t associa la lunghezza del tratto di curva percorso fino all'istante t . Nella definizione seguente l'estremo b dell'intervallo può appartenere o no all'intervallo, e può anche essere $+\infty$.

Definizione 3.1.8 (Ascissa curvilinea) Sia $\varphi : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva localmente rettificabile; per ogni $t \in [a, b)$ poniamo

$$s(t) = \ell(\varphi, [a, t]);$$

la funzione s si dice ascissa curvilinea della curva φ .

Osservazione 3.1.9 Se $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ è una curva e $[a, b]$, $[b, c]$ sono due sottointervalli adiacenti di I allora risulta $\ell(\varphi, [a, c]) = \ell(\varphi, [a, b]) + \ell(\varphi, [b, c])$. In particolare, la funzione $s : [a, b) \rightarrow [0, \ell(\varphi, [a, b)))$ è monotona crescente.

Il seguente teorema fornisce una formula per il calcolo della lunghezza di una curva regolare a tratti che può essere interpretata dicendo che la lunghezza della curva (ossia, in termini cinematici, lo spazio percorso) è uguale all'integrale della velocità scalare.

Teorema 3.1.10 Sia $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva regolare a tratti. Allora φ è rettificabile, e la sua lunghezza è data da

$$\ell(\varphi, [a, b]) = \int_a^b \|\varphi'(t)\| dt. \quad (3.1.2)$$

DIM. Osserviamo anzitutto che basta provare la (3.1.2) per le curve regolari. Infatti, se la formula vale per le curve regolari e φ è regolare nei tratti $[t_{i-1}, t_i]$, con $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$, allora

$$\ell(\varphi, [a, b]) = \sum_{i=1}^k \ell(\varphi, [t_{i-1}, t_i]) = \sum_{i=1}^k \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\varphi'(t)\| dt = \int_a^b \|\varphi'(t)\| dt.$$

Supponiamo perciò che φ sia regolare in $[a, b]$, e proviamo che la funzione s è in questo caso derivabile, con $s'(t) = \|\varphi'(t)\|$. A tale scopo, fissiamo $t \in [a, b]$, e sia $|h| \neq 0$ abbastanza piccolo affinché anche $t+h$ appartenga ad $[a, b]$. Poiché $|s(t+h) - s(t)|$ è uguale alla lunghezza del tratto di φ percorso nell'intervallo di estremi t e $t+h$, confrontando tale lunghezza con la lunghezza del segmento di estremi $\varphi(t)$ e $\varphi(t+h)$, che è una speciale poligonale inscritta nel tratto di curva suddetto, risulta:

$$\|\varphi(t+h) - \varphi(t)\| \leq |s(t+h) - s(t)|. \quad (3.1.3)$$

Sia ora P la poligonale di vertici $\varphi(t_0), \varphi(t_1), \dots, \varphi(t_k)$ inscritta nel tratto di curva percorso nell'intervallo di estremi t e $t+h$; per il teorema fondamentale del calcolo 1.4.1

risulta

$$\begin{aligned}\ell(P) &= \sum_{i=1}^k \|\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})\| = \sum_{i=1}^k \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \varphi'(\tau) d\tau \right\| \\ &\leq \sum_{i=1}^k \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\varphi'(\tau)\| d\tau = \int_{t_0}^{t_k} \|\varphi'(\tau)\| d\tau.\end{aligned}$$

Poiché questa disuguaglianza vale per *ogni* poligonale inscritta, risulta

$$|s(t+h) - s(t)| \leq \left| \int_t^{t+h} \|\varphi'(\tau)\| d\tau \right|. \quad (3.1.4)$$

Dividendo per $|h|$ ambo i membri delle (3.1.3), (3.1.4) e tenendo conto della monotonia di s risulta allora:

$$\left\| \frac{\varphi(t+h) - \varphi(t)}{h} \right\| \leq \frac{s(t+h) - s(t)}{h} \leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \|\varphi'(\tau)\| d\tau,$$

da cui, passando al limite per $h \rightarrow 0$, $s'(t) = \|\varphi'(t)\|$ per ogni $t \in [a, b]$. Segue:

$$\ell(\varphi, [a, b]) = s(b) - s(a) = \int_a^b s'(t) dt = \int_a^b \|\varphi'(t)\| dt.$$

Poiché φ' è una funzione continua, il suo integrale su $[a, b]$ è finito, e φ è rettificabile.

QED

Osservazioni 3.1.11

1. Si vede facilmente, con un cambiamento di variabili nell'integrale, che se $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\psi : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ sono due curve equivalenti nel senso della Definizione 3.1.4 allora $\ell(\varphi, [a, b]) = \ell(\psi, [c, d])$. Infatti, ricordando che $\varphi'(t) = \alpha'(t)\psi'(\alpha(t))$, si ha

$$\ell(\psi, [c, d]) = \int_c^d \|\psi'(\tau)\| d\tau = \int_{\alpha^{-1}(c)}^{\alpha^{-1}(d)} \frac{1}{|\alpha'(t)|} \|\varphi'(t)\| |\alpha'(t)| dt = \int_a^b \|\varphi'(t)\| dt,$$

dove abbiamo eseguito il cambio di variabili $\tau = \alpha(t)$ nel primo integrale.

2. Se $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ è una curva regolare, allora $s : [a, b] \rightarrow [0, \ell(\varphi, [a, b])]$ è un cambiamento di parametro ammissibile perché s è di classe C^1 ed $s'(t) = \|\varphi'(t)\| \neq 0$ per ogni t ; ne segue che è possibile rappresentare ogni curva regolare usando come parametro l'ascissa curvilinea, ponendo cioè $\psi(s) = \varphi(t)$ per $s = s(t)$. Questo dà una rappresentazione canonica della curva, dal momento che l'eguaglianza $\psi'(s(t))s'(t) = \varphi'(t)$ implica che $\|\psi'(s)\| = 1$. Ne segue che la derivata della ψ rispetto all'ascissa curvilinea fornisce il versore tangente, cioè, per $s = s(t)$ risulta $\psi'(s) = T(t)$.

Esempi 3.1.12

1. **(Lunghezza di una curva cartesiana)** Data $f \in C^1([a, b])$, se $\varphi(t) = (t, f(t))$ è la curva cartesiana che descrive il grafico di f come nell'esempio 3.1.6, allora la sua lunghezza è data da

$$\ell(\varphi, [a, b]) = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(t)]^2} dt.$$

2. **(Una curva cartesiana non rettificabile)** Data $f \in C^0([0, 2/\pi]) \cap C^1(]0, 2/\pi])$ definita da $f(t) = t \sin\left(\frac{1}{t}\right)$ per $t > 0$ e $f(0) = 0$, se $\varphi(t) = (t, f(t))$ è la curva cartesiana che descrive il grafico di f come nell'esempio 3.1.6 (vedi Figura – 3.1), allora la sua lunghezza è infinita. Infatti, considerati i punti $t_h = \frac{2}{\pi(2h+1)}$

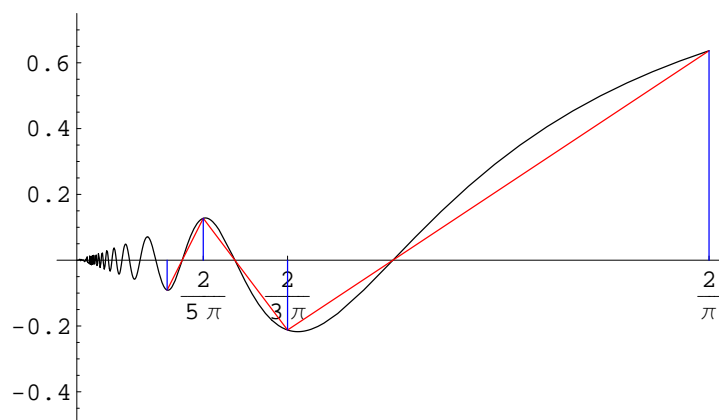


Figura – 3.1: Una poligonale inscritta nella curva φ .

($h \in \mathbb{N}$) risulta che per $k > 1$ otteniamo una successione di poligonali inscritte la cui lunghezza

$$\ell(\varphi, [t_k, t_0]) \geq \frac{2}{\pi} \sum_{h=1}^k \frac{1}{2h-1} + \frac{1}{2h+1} = \frac{2}{\pi} \sum_{h=1}^k \frac{4h}{4h^2-1} \geq \sum_{h=1}^k \frac{2}{\pi h}$$

non è limitata superiormente.

3. **(Curve in coordinate polari)** Una curva piana può essere a volte assegnata convenientemente dandone l'equazione in coordinate polari, o in forma esplicita o in forma parametrica. Nel primo caso, tipicamente si tratta di un'espressione del tipo $\varrho = g(\vartheta)$, con $\vartheta \in (\vartheta_0, \vartheta_1)$. Per esempio, la circonferenza di centro l'origine e raggio R , percorsa una volta, ha la semplice equazione $\varrho = R$. Per calcolare la

formula generale della lunghezza di una curva della forma detta, possiamo riscriverla in coordinate cartesiane

$$\begin{cases} x = g(\vartheta) \cos \vartheta \\ y = g(\vartheta) \sin \vartheta \end{cases}$$

e poi usare la formula (3.1.2) con $\varphi(\vartheta) = (g(\vartheta) \cos \vartheta, g(\vartheta) \sin \vartheta)$; con semplici calcoli si ottiene:

$$\ell(\varphi, [\vartheta_0, \vartheta_1]) = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} \sqrt{[g(\vartheta)]^2 + [g'(\vartheta)]^2} d\vartheta.$$

Come applicazione, possiamo considerare la spirale φ di equazione polare $\varrho = e^{-\vartheta}$, per esempio con $\vartheta \in [0, 6\pi]$, ottenendo:

$$\ell(\varphi, [0, 6\pi]) = \int_0^{6\pi} \sqrt{2e^{-2\vartheta}} d\vartheta = \sqrt{2}(1 - e^{-6\pi}).$$

Se invece la curva è data in coordinate polari, ma in forma parametrica, è assegnata un'espressione vettoriale del tipo

$$\begin{cases} \varrho = \gamma(t) \\ \vartheta = \eta(t) \end{cases}$$

Ragionando come nel caso precedente si ottiene la formula

$$\ell(\varphi, [a, b]) = \int_a^b \sqrt{[\gamma'(t)]^2 + [\gamma(t)]^2 [\eta'(t)]^2} dt.$$

3.2 Integrali di linea

In questo paragrafo definiamo gli integrali di linea e ne presentiamo le principali proprietà. Su una curva si possono integrare sia funzioni reali che funzioni vettoriali e corrispondentemente daremo due definizioni. La prima risulta invariante per equivalenza di curve, la seconda invece dipende dall'orientazione data alla curva, e cambia segno cambiando orientazione. Integrali di funzioni vettoriali s'incontrano in dinamica quando si definisce il *lavoro* compiuto da una forza. Diamo ora le due definizioni, e poi discutiamo i legami fra esse e le relative proprietà.

Definizione 3.2.1 (Integrali di funzioni reali) Siano $A \subset \mathbb{R}^n$, $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva regolare con sostegno $\varphi^* = \varphi([a, b])$ contenuto in A , ed $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Poniamo

$$\int_{\varphi} f ds = \int_a^b f(\varphi(t)) \|\varphi'(t)\| dt. \quad (3.2.5)$$

Se φ è regolare nei tratti $[t_{i-1}, t_i]$, con $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$ allora poniamo

$$\int_{\varphi} f ds = \sum_{i=1}^k \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(\varphi(t)) \|\varphi'(t)\| dt.$$

Se φ è chiusa spesso si usa la notazione $\oint_{\varphi} f ds$.

Definizione 3.2.2 (Integrali di funzioni vettoriali) Siano $A \subset \mathbb{R}^n$, $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva regolare con sostegno $\varphi^* = \varphi([a, b])$ contenuto in A , ed $F : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funzione vettoriale continua. Poniamo

$$\int_{\varphi} F \cdot d\ell = \int_a^b F(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt. \quad (3.2.6)$$

Se φ è regolare nei tratti $[t_{i-1}, t_i]$, con $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$ allora poniamo

$$\int_{\varphi} F \cdot d\ell = \sum_{i=1}^k \int_{t_{i-1}}^{t_i} F(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt.$$

Se φ è chiusa spesso si usa la notazione $\oint_{\varphi} F \cdot d\ell$.

Osservazione 3.2.3 Dati un campo vettoriale F ed una curva φ come nella Definizione 3.2.2, l'integrale di F su φ definito nella (3.2.6) si può ricondurre all'integrale di una funzione reale definita sul sostegno di φ ponendo per ogni $t \in [a, b]$ $f(\varphi(t)) = F(\varphi(t)) \cdot T(t)$, dove T è come al solito il versore tangente. Segue subito dalle definizioni che $\int_{\varphi} F \cdot d\ell = \int_{\varphi} f ds$.

Ricordando le proprietà degli integrali su intervalli di \mathbb{R} , si deducono subito le seguenti proprietà degli integrali di linea, che enunciamo per gli integrali delle funzioni reali. Tenendo conto dell'osservazione precedente, analoghe proprietà varranno per gli integrali delle funzioni vettoriali. Per enunciare la proprietà 3, analoga all'additività rispetto al dominio, diamo la definizione di composizione di due curve, in cui per semplicità supponiamo che le curve siano entrambe definite sull'intervallo $[0, 1]$. Questo, grazie all'Osservazione 3.1.5.2, non è restrittivo.

Definizione 3.2.4 Siano φ e ψ due curve definite nell'intervallo $[0, 1]$ a valori in \mathbb{R}^n ; se $\varphi(1) = \psi(0)$ si definisce la composizione di φ e ψ , denotata $(\varphi \oplus \psi) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, ponendo:

$$(\varphi \oplus \psi)(t) = \begin{cases} \varphi(2t) & \text{se } 0 \leq t \leq 1/2 \\ \psi(2t - 1) & \text{se } 1/2 < t \leq 1. \end{cases}$$

Enunciamo allora le proprietà degli integrali di linea:

1. L'integrale è lineare:

$$\int_{\varphi} (\alpha f + \beta g) ds = \alpha \int_{\varphi} f ds + \beta \int_{\varphi} g ds.$$

2. Se $f \geq 0$ sul sostegno di φ , allora

$$\int_{\varphi} f \, ds \geq 0.$$

3. Valgono le disuguaglianze:

$$\left| \int_{\varphi} f \, ds \right| \leq \int_{\varphi} |f| \, ds \leq \sup_{t \in [a, b]} |f(\varphi(t))| \, \ell(\varphi, [a, b]).$$

4. Vale l'eguaglianza:

$$\int_{\varphi \oplus \psi} f \, ds = \int_{\varphi} f \, ds + \int_{\psi} f \, ds.$$

Osservazione 3.2.5 È immediato che se $f(x) = 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, allora l'integrale di f sulla curva φ dà la lunghezza di φ . Si vede facilmente con un cambiamento di variabile, come nel caso della formula per la lunghezza, che l'integrale in (3.2.5) non cambia se si considera una curva equivalente a φ . Invece, nel caso dell'integrale di una funzione vettoriale in (3.2.6), se la curva equivalente considerata ha la stessa orientazione l'integrale non cambia, se invece ha orientazione opposta assume valore opposto. Infatti, considerare una curva con orientazione opposta è equivalente a considerare un versore tangente opposto al versore T definito da φ' , e questo, come spiegato nell'Osservazione 3.2.3, equivale ad integrare la funzione $-F \cdot T$. In formule, se $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ è una curva regolare e $\psi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, definita da $\psi(t) = \varphi(1 - t)$, è la curva con uguale sostegno ed orientazione opposta, allora, osservando che $\psi'(t) = -\varphi'(1 - t)$,

$$\begin{aligned} \int_{\psi} F \cdot d\ell &= \int_0^1 F(\psi(t)) \cdot \psi'(t) \, dt = - \int_0^1 F(\varphi(1 - t)) \cdot \varphi'(1 - t) \, dt \\ &\stackrel{t=1-\tau}{=} \int_1^0 F(\varphi(\tau)) \cdot \varphi'(\tau) \, d\tau = - \int_0^1 F(\varphi(\tau)) \cdot \varphi'(\tau) \, d\tau \\ &= - \int_{\varphi} F \cdot d\ell \quad \forall F. \end{aligned}$$

3.3 Campi vettoriali conservativi

In questo paragrafo affrontiamo lo studio del seguente problema:

dato un campo vettoriale $F : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, esiste $f \in C^1(A)$ tale che $\nabla f = F$ in A ?

Nel caso $n = 1$ il problema è completamente risolto dal teorema fondamentale del calcolo integrale, che dà una risposta affermativa per ogni funzione continua F . Nel caso $n > 1$ la soluzione non è altrettanto semplice, e non dipende dalla regolarità del dato

F , ma da condizioni di compatibilità fra le varie componenti di F e dalla geometria del dominio A . Iniziamo con la seguente definizione.

Definizione 3.3.1 (Campi conservativi) *Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto, e sia $F : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua. Diciamo che F è un campo conservativo in A se esiste una funzione reale $f \in C^1(A)$ tale che $\nabla f = F$, ossia*

$$F_i(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \quad \forall x \in A, \forall i = 1, \dots, n.$$

Se F è conservativo in A allora ogni funzione f verificante le precedenti condizioni si dice potenziale o primitiva di F in A .

Nel caso $n = 1$ l'integrale di una funzione continua su un intervallo I è uguale alla differenza dei valori che una (qualunque) primitiva assume negli estremi di I , e due primitive della stessa funzione differiscono per una costante. Valgono risultati analoghi in più variabili; naturalmente, l'integrale su un intervallo va sostituito con l'integrale di linea.

Teorema 3.3.2 (Potenziali) *Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto connesso per poligonalità, e sia $F : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo conservativo in A . Allora:*

- (i) *se f e g sono due primitive di F in A esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $f = g + c$;*
- (ii) *se $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ è una curva regolare con sostegno contenuto in A risulta:*

$$\int_{\varphi} F \cdot d\ell = f(\varphi(1)) - f(\varphi(0)),$$

dove f è una qualunque primitiva di F in A .

DIM. (i) Poiché $\nabla(f - g) = 0$ in A , dal teorema 2.1.10 segue la tesi.

(ii) Sia f una primitiva di F , e sia $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $g(t) = f(\varphi(t))$. Allora

$$g'(t) = \nabla f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = F(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$$

e quindi per il Teorema fondamentale del calcolo integrale

$$\int_{\varphi} F \cdot d\ell = \int_0^1 F(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = \int_0^1 g'(t) dt = g(1) - g(0) = f(\varphi(1)) - f(\varphi(0)).$$

QED

Osservazione 3.3.3 In particolare, il teorema precedente mostra che, dato un campo conservativo in un aperto connesso per poligonalità, il suo potenziale è determinato a meno di una costante. Se il dominio A non è connesso per poligonalità allora, come nel caso

delle funzioni di una variabile definite nell'unione di più intervalli, si avrà una costante arbitraria per ogni componente connessa di A .

Il teorema mostra anche che l'integrale di un campo conservativo lungo una curva *dipende solo dagli estremi della curva*, e non dalla particolare curva che li congiunge. Questa proprietà caratterizza i campi conservativi.

Teorema 3.3.4 (Caratterizzazione dei campi conservativi) *Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto connesso, e sia $F : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funzione continua in A . Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

- (i) F è un campo conservativo;
- (ii) se $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ è una curva regolare chiusa con sostegno contenuto in A allora $\oint_{\varphi} F \cdot d\ell = 0$;
- (iii) se φ e ψ sono due curve regolari con sostegno contenuto in A aventi gli stessi estremi (nell'ordine) allora $\int_{\varphi} F \cdot d\ell = \int_{\psi} F \cdot d\ell$.

DIM. (i) \Rightarrow (ii) Se $\varphi : [0, 1] \rightarrow A$ è chiusa, dal Teorema 3.3.2(ii) segue che $\int_{\varphi} F \cdot d\ell = 0$.
(ii) \Rightarrow (iii) Date φ e ψ come nell'enunciato, ed indicata con $-\psi$ la curva $\psi(1-t)$, la composizione $\varphi \oplus (-\psi)$ è una curva chiusa e quindi

$$0 = \int_{\varphi \oplus \psi} F \cdot d\ell = \int_{\varphi} F \cdot d\ell + \int_{-\psi} F \cdot d\ell = \int_{\varphi} F \cdot d\ell - \int_{\psi} F \cdot d\ell$$

e segue l'asserto.

(iii) \Rightarrow (i) Fissiamo un punto qualunque $x_0 \in A$ e poniamo

$$f(x) = \int_{\varphi_{x_0}^x} F \cdot d\ell,$$

dove $\varphi_{x_0}^x$ è una *qualunque* curva di primo estremo x_0 e secondo estremo x . Occorre osservare che la definizione è ben posta, in quanto per la connessione di A certamente per ogni $x \in A$ esiste una curva con estremi x_0 e x , ed inoltre, per l'ipotesi (iii) l'integrale non dipende dalla curva scelta ma solo dagli estremi; ne segue che, essendo x_0 fissato una volta per tutte, la funzione f dipende solo da x , come indicato. Mostriamo ora che per ogni $x \in A$ e per ogni direzione e_i risulta $D_i f(x) = F_i(x)$. A tale scopo calcoleremo il limite del rapporto incrementale

$$\frac{f(x + he_i) - f(x)}{h} = \frac{1}{h} \left(\int_{\varphi_{x_0}^{x+he_i}} F \cdot d\ell - \int_{\varphi_{x_0}^x} F \cdot d\ell \right),$$

con $|h| < r$ ed $r > 0$ tale che $B_r(x) \subset A$. Poiché possiamo scegliere la curva $\varphi_{x_0}^{x+he_i}$ come vogliamo, purché abbia gli estremi indicati, scegliamo $\varphi_{x_0}^{x+he_i} = \varphi_{x_0}^x \oplus [x, x + he_i]$, in modo

che

$$\int_{\varphi_{x_0}^{x+he_i}} F \cdot d\ell - \int_{\varphi_{x_0}^x} F \cdot d\ell = \int_{[x, x+he_i]} F \cdot d\ell = \int_0^1 F_i(x + the_i) h dt,$$

risultato che si ottiene parametrizzando il segmento di estremi x e $x + he_i$ nella forma $\varphi(t) = x + the_i$, $t \in [0, 1]$, che dà $\varphi'(t) = he_i$ e quindi $F(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = F_i(x + the_i)h$. Si ha quindi

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + he_i) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^1 F_i(x + the_i) h dt = \int_0^1 F_i(x + the_i) dt = F_i(x)$$

dove l'ultima eguaglianza segue dalla continuità di F_i . Per l'arbitrarietà di x della direzione e_i si ha $\nabla f = F$ in A e per la continuità di F la primitiva f è di classe C^1 in A .

◻

Questo risultato è utile più per *negare* che un campo sia conservativo che per provarlo: infatti, per provare che un campo è conservativo, in linea di principio si dovrebbe verificare che il suo integrale è nullo su *tutte* le curve chiuse, e questo è chiaramente impossibile. Viceversa, basta provare che l'integrale è diverso da zero su *una* curva chiusa per esser certi che il campo *non* è conservativo. La prima verifica da fare per sapere se un campo può essere conservativo è però quella contenuta nella seguente proposizione.

Proposizione 3.3.5 *Se $F : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è un campo conservativo di classe $C^1(A)$ allora*

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(x) \quad \forall x \in A, \forall i, j = 1, \dots, n. \quad (3.3.7)$$

DIM. Se $F = \nabla f$ in A , allora $f \in C^2(A)$, e la condizione (3.3.7) è semplicemente la condizione di simmetria della matrice hessiana di f (Teorema di Schwarz 2.1.15). ◻

La condizione (3.3.7), per $n = 3$, dice che il *rotore* di F è nullo (vedi (5.9.24)). In tal caso si dice anche che il campo è *irrotazionale*. È una condizione necessaria di facile verifica per la conservatività, ma non è sufficiente, come mostra il seguente esempio.

Esempio 3.3.6 (Un campo irrotazionale non conservativo) Consideriamo il campo piano F definito in $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$:

$$F(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right).$$

Si verifica facilmente che vale la condizione (3.3.7), ma l'integrale su una circonferenza di centro l'origine e raggio R non è nullo. Infatti, posto $\varphi(t) = (R \cos t, R \sin t)$ per $t \in [0, 2\pi]$:

$$\oint_{\varphi} F \cdot d\ell = \int_0^{2\pi} \left(\frac{-R \sin t}{R^2} (-R \sin t) + \frac{R \cos t}{R^2} (R \cos t) \right) dt = 2\pi \neq 0 \quad (3.3.8)$$

e quindi F non è conservativo in A .

Osserviamo infine che, se si estende F ad $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z)\}$ ponendo

$$\mathcal{B}(x, y, z) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right)$$

si ottiene (a meno di costanti) il campo magnetico di un filo rettilineo indefinito (coincidente con l'asse z) percorso da corrente costante dato dalla legge di Biot-Savart.

Notiamo che l'integrale in (3.3.8) non dipende dal raggio della circonferenza; in realtà, l'integrale $\oint_{\varphi} F \cdot d\ell$ vale 2π tutte le volte che φ è una curva chiusa regolare che compie un giro attorno all'origine in verso antiorario. Per formalizzare questa proprietà in modo più preciso e dimostrarla, introduciamo una relazione di equivalenza tra le curve chiuse.

Definizione 3.3.7 (Omotopia di curve chiuse) Sia A un sottoinsieme aperto di \mathbb{R}^n e siano $\varphi_0 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\varphi_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ due circuiti tali che $\varphi_0^* \subset A$, $\varphi_1^* \subset A$. Si dice che φ_0 e φ_1 sono A -omotopi se esiste una funzione continua $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ verificante le seguenti condizioni

1. L'immagine di H è contenuta in A .
2. Per ogni $s \in [0, 1]$, la funzione $H(\cdot, s)$ è un circuito.
3. $H(\cdot, 0) = \varphi_0$, $H(\cdot, 1) = \varphi_1$.

Una funzione H verificante le proprietà elencate sopra viene denominata omotopia tra i circuiti φ_0 e φ_1 .

È immediato verificare che la relazione di omotopia in A appena introdotta è una relazione di equivalenza: infatti, ogni circuito φ è omotopo a sé stesso in ogni aperto A che contenga il suo sostegno (basta prendere $H(t, s) = \varphi(t)$ per ogni s), e se φ_0 è omotopo a φ_1 in A allora φ_1 è omotopo a φ_0 in A (se H è la prima omotopia, basta prendere $H_1(t, s) = H(t, 1 - s)$); infine, se φ_0 è omotopo a φ_1 in A con omotopia H_1 e φ_1 è omotopo in A a φ_2 con omotopia H_2 , basta prendere

$$H(t, s) = \begin{cases} H_1(t, 2s) & 0 \leq s \leq 1/2 \\ H_2(t, 2s - 1) & 1/2 < s \leq 1 \end{cases}$$

L'idea geometrica è che due curve sono omotope in A se il sostegno della prima si può deformare nel sostegno della seconda rispettando tre condizioni: la prima è che la deformazione avvenga *senza uscire dall'insieme* A , la seconda è che la prima curva si possa deformare nella seconda solo in modo che durante la deformazione la curva resti sempre chiusa, infine non è ammesso produrre discontinuità. Un risultato molto importante riguarda l'uguaglianza dell'integrale curvilineo lungo due circuiti omotopi.

Teorema 3.3.8 (Invarianza dell'integrale per omotopia) *Sia A un sottoinsieme aperto di \mathbb{R}^n , sia $F : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale irrotazionale e siano $\varphi_0, \varphi_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ due curve chiuse regolari A -omotope. Allora*

$$\int_{\varphi_0} F \cdot d\ell = \int_{\varphi_1} F \cdot d\ell .$$

DIM. Non dimostriamo il teorema nel caso generale, ma nel caso particolare (a cui ci si potrebbe sempre ricondurre, ma non approfondiamo questo aspetto) in cui l'omotopia H sia di classe C^2 . In questo caso, posto $\varphi_s(t) = H(t, s)$, possiamo definire la funzione

$$\mathcal{I}(s) = \int_{\varphi_s} F \cdot d\ell , \quad s \in [0, 1], \quad (3.3.9)$$

e derivarla rispetto ad s . Osserviamo che la seconda eguaglianza nella formula seguente sarà giustificata successivamente, vedi Teorema 5.7.3. Si ha

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{I}}{ds} &= \frac{d}{ds} \int_0^1 F(H(s, t)) \cdot \varphi'_s(t) dt = \int_0^1 \frac{d}{ds} \sum_{j=1}^n F_j(H(s, t)) \frac{\partial H_j}{\partial t}(s, t) dt \\ &= \int_0^1 \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial F_j}{\partial x_k}(H(s, t)) \frac{\partial H_k}{\partial s}(s, t) \frac{\partial H_j}{\partial t}(s, t) dt + \int_0^1 \sum_{j=1}^n F_j(H(s, t)) \frac{\partial^2 H_j}{\partial t \partial s}(s, t) dt \\ &= \int_0^1 \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial F_j}{\partial x_k} \frac{\partial H_k}{\partial s} \frac{\partial H_j}{\partial t} dt + \left[\sum_{j=1}^n F_j \frac{\partial H_j}{\partial s} \right]_{t=0}^{t=1} - \int_0^1 \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial F_j}{\partial x_k} \frac{\partial H_k}{\partial t} \frac{\partial H_j}{\partial s} dt \\ &= \int_0^1 \sum_{j,k=1}^n \left[\frac{\partial F_j}{\partial x_k} - \frac{\partial F_k}{\partial x_j} \right] \frac{\partial H_k}{\partial s} \frac{\partial H_j}{\partial t} dt = 0. \end{aligned}$$

Segue che \mathcal{I} è costante e quindi $\mathcal{I}(0) = \mathcal{I}(1)$, cioè la tesi. \square

Il teorema precedente giustifica le considerazioni espresse a proposito dell'esempio 3.3.6. Un caso importante di omotopia, in questo contesto, è il caso di circuiti omotopi a punti. Un punto x_0 si può pensare come una curva definita da una funzione costante, $\varphi_{x_0}(t) = x_0$ per $t \in [0, 1]$. Evidentemente, dal teorema precedente segue che se φ è una curva chiusa A -omotopa ad un punto ed F è un campo irrotazionale in A , allora

$$\int_{\varphi} F \cdot d\ell = \int_{\varphi_{x_0}} F \cdot d\ell = 0.$$

Ancora a proposito dell'esempio 3.3.6, è chiaro che un circuito φ che giri attorno all'origine (punto in cui il campo F non è definito, sicché $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$), non è omotopo in A ad un punto, e quindi non c'è ragione di aspettarsi che l'integrale su φ sia nullo. Queste considerazioni ci portano a definire una classe di insiemi che hanno una proprietà geometrica rilevante per il problema che stiamo studiando.

Definizione 3.3.9 Si dice che un sottoinsieme A di \mathbb{R}^n è semplicemente connesso se è connesso e se ogni circuito con sostegno contenuto in A è A -omotopo ad un punto di A .

Dal Teorema 3.3.8 segue immediatamente il seguente risultato.

Teorema 3.3.10 Se A è un insieme aperto semplicemente connesso, allora ogni campo irrotazionale in A è conservativo in A .

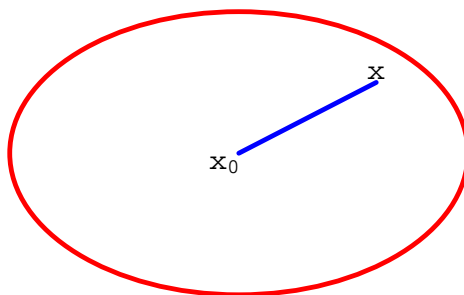
DIM. Basta osservare che, siccome ogni circuito in A è A -omotopo ad un punto, e siccome l'integrale dei campi irrotazionali sui circuiti è invariante per omotopia, l'integrale di ogni campo irrotazionale su ogni circuito in A è nullo. La tesi segue allora dal Teorema 3.3.4.

□ QED

In generale, non è facile verificare che un insieme sia semplicemente connesso. Perciò siamo interessati a classi di insiemi con proprietà geometriche più evidenti che siano semplicemente connessi, per poter applicare il Teorema 3.3.10.

Osservazione 3.3.11 Ricordiamo che un insieme $A \subset \mathbb{R}^n$ si dice *convesso* se per ogni coppia x, y di punti di A il segmento $[x, y]$ è interamente contenuto in A . Più in generale, A si dice *stellato rispetto ad* x_0 se per ogni punto $x \in A$ il segmento $[x_0, x]$ è tutto contenuto in A , e si dice *stellato* se è stellato rispetto a qualche suo punto. Ovviamente, ogni convesso è stellato ed è facile vedere che ogni stellato è semplicemente connesso. Infatti, se A è stellato rispetto ad x_0 e φ è un circuito in A , la funzione $H(t, s) = x_0 + s(\varphi(t) - x_0)$ è un'omotopia tra φ ed x_0 . Segue allora dal Teorema 3.3.10 che se $F : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è un campo vettoriale irrotazionale ed A è un aperto convesso o, più in generale, stellato, allora F è conservativo.

Osservazione 3.3.12 Se A è stellato rispetto al punto $x_0 \in A$ allora la funzione definita per ogni $x \in A$ da $f(x) = \int_\gamma F \cdot d\ell$, dove $\gamma : [0, 1] \rightarrow A$ è data da $\gamma(t) = x_0 + t(x - x_0)$, è una primitiva di F .



Una conseguenza immediata è il seguente risultato, denominato a volte Lemma di Poincaré, che si ottiene considerando per ogni $x_0 \in A$ un intorno convesso (per esempio, sferico) tutto contenuto in A .

Teorema 3.3.13 Se $A \subset \mathbb{R}^n$ è aperto e $F : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ verifica la condizione (3.3.7) allora per ogni $x_0 \in A$ esistono un intorno U di x_0 ed una funzione $f \in C^1(U)$ tali che $\nabla f = F$ in U . Tali primitive f si dicono primitive o potenziali locali di F .

Possiamo quindi affermare che nel problema enunciato all'inizio di questo paragrafo è essenziale il dato del dominio A in cui si vuole risolverlo. A questo punto, comunque, resta da vedere come si possono calcolare le primitive (locali o globali) di un campo dato $F : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, che supponiamo di classe C^1 . Per prima cosa, si controlla la (3.3.7): se tale condizione non vale allora certamente il campo F non è (neanche localmente) conservativo. Se la (3.3.7) è verificata, il passo successivo è vedere se A è semplicemente connesso o qualcuna delle condizioni nell'Osservazione 3.3.11 è soddisfatta: se ciò accade, esistono primitive globali. Altrimenti, le primitive che si troveranno saranno, almeno in principio (vedi Osservazione 3.3.14) solo locali. In ogni caso, si procede al loro calcolo seguendo uno dei seguenti metodi.

Primo metodo (integrale lungo una curva) Si fissa (arbitrariamente) un punto x_0 in A e per ogni punto x di A si considera una curva regolare φ (anch'essa arbitraria) di estremi (nell'ordine) x_0 ed x . L'integrale $\int_{\varphi} F \cdot d\ell$ (che per il Teorema 3.3.4 dipende solo dal punto terminale x) dà il potenziale di F che si annulla in x_0 . Convieni (se la geometria dell'insieme A lo consente) scegliere un segmento oppure una poligonale con i lati paralleli agli assi coordinati. Se l'insieme A non è connesso per poligonali si ripete il procedimento in ciascuna componente connessa (vedi Esempio 1.1.21.3). Per esempio, consideriamo il campo vettoriale

$$F(x, y) = \left(\frac{-2x}{(x^2 - y - 1)^2}, \frac{1}{(x^2 - y - 1)^2} \right), \quad (x, y) \in A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) : y = x^2 - 1\}.$$

Il campo F verifica la (3.3.7) e il suo dominio A è costituito dalle due componenti connesse $A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > x^2 - 1\}$ e $A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < x^2 - 1\}$, con A_1 convesso ed A_2 né convesso né stellato. Si possono calcolare le primitive in A_1 partendo per esempio dall'origine ed integrando lungo segmenti. Fissato il punto generico $(x, y) \in A_1$, il segmento di estremi $(0, 0)$ e (x, y) ha parametrizzazione $\varphi(t) = (tx, ty)$, $t \in [0, 1]$. La primitiva nulla nell'origine vale allora in (x, y)

$$\begin{aligned} \int_{\varphi} F \cdot d\ell &= \int_0^1 \left(\frac{-2tx}{(t^2x^2 - ty - 1)^2}, \frac{1}{(t^2x^2 - ty - 1)^2} \right) \cdot (x, y) dt = \int_0^1 \frac{-2tx^2 + y}{(t^2x^2 - ty - 1)^2} dt \\ &= \left[\frac{1}{t^2x^2 - ty - 1} \right]_0^1 = \frac{1}{x^2 - y - 1} + 1. \end{aligned}$$

In A_2 possiamo fissare ad esempio il punto $P_0(0, -2)$ ed integrare fino a $P(x, y)$ lungo la poligonale φ di vertici P_0, P_1, P , con $P_1(x, -2)$. Posto

$$\varphi(t) = \begin{cases} (2tx, -2) & \text{per } 0 \leq t \leq 1/2 \\ (x, -2 + (2t - 1)(y + 2)) & \text{per } 1/2 < t \leq 1, \end{cases}$$

si ha

$$\begin{aligned}\int_{\varphi} F \cdot d\ell &= \int_0^{1/2} \frac{-8tx^2}{(4t^2x^2 + 1)^2} dt + \int_{1/2}^1 \frac{2(y+2)}{[x^2 - (2t-1)(y+2) + 1]^2} dt \\ &= \left[\frac{1}{4t^2x^2 + 1} \right]_0^{1/2} + \left[\frac{1}{x^2 - (2t-1)(y+2) + 1} \right]_{1/2}^1 = \frac{1}{x^2 - y - 1} - 1\end{aligned}$$

e quest'ultima funzione è la primitiva di F in A_2 che si annulla in $(0, -2)$. In generale, le primitive di F in A sono allora

$$f(x, y) = \frac{1}{x^2 - y - 1} + c_1 \chi_{A_1}(x, y) + c_2 \chi_{A_2}(x, y),$$

dove χ_E denota la *funzione caratteristica* dell'insieme E , vedi (5.2.3).

Secondo metodo (primitive parziali) Si calcola l'integrale indefinito della prima componente di F rispetto ad x_1 :

$$\int F_1(x_1, \dots, x_n) dx_1;$$

sia f_1 una primitiva. Se F_1 dipendesse solo da x_1 , il risultato sarebbe determinato a meno di una costante, ma, poiché sono presenti le altre variabili, che entrano solo come parametri nel calcolo dell'integrale, f_1 sarà determinata *a meno di una funzione delle variabili* x_2, \dots, x_n , sia $g(x_2, \dots, x_n)$. Si impone allora che

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(x) + \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) = F_i(x) \quad \forall i = 2, \dots, n$$

e si usano queste equazioni per determinare g . Per esempio, sia

$$F(x, y) = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2}, \frac{2y}{x^2 + y^2} \right), \quad (x, y) \in A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

Si verifica facilmente che F verifica (3.3.7). Allora

$$\int \frac{2x}{x^2 + y^2} dx = \log(x^2 + y^2) + g(y);$$

con la notazione precedente, $f_1(x, y) = \log(x^2 + y^2)$. Imponendo

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) + g'(y) = \frac{\partial}{\partial y} \log(x^2 + y^2) + g'(y) = F_2(x, y) = \frac{2y}{x^2 + y^2}$$

si ottiene $g'(y) = 0$, ossia g costante, e, poiché A è connesso per poligoni, l'espressione $f(x, y) = \log(x^2 + y^2) + c$, al variare di $c \in \mathbb{R}$, rappresenta tutte le primitive di F .

Osservazione 3.3.14 Se consideriamo l'esempio precedente, possiamo notare che il dominio A del campo studiato non è né convesso né stellato, sicché non si può affermare a priori che esistano primitive globali in A ; anzi, visto che è lo stesso dominio dell'esempio 3.3.6, sappiamo che in generale non possiamo aspettarci che ce ne siano. In realtà il calcolo delle primitive, inizialmente solo locali, ha condotto direttamente ad ottenere primitive globali, dal momento che le funzioni $\log(x^2 + y^2) + c$ sono definite in tutto l'aperto A . Quest'eventualità va sempre considerata: dopo aver calcolato le primitive locali, un esame del loro dominio naturale di definizione dirà se sono solo locali oppure globali.

Nel caso di \mathbb{R}^2 si può dare una condizione geometrica su A equivalente alla semplice connessione.

Proposizione 3.3.15 *Sia $A \subset \mathbb{R}^2$ un aperto. l'insieme A è semplicemente connesso se e solo se verifica la seguente condizione:*

per ogni $B \subset \mathbb{R}^2$ tale che ∂B sia il sostegno di una curva regolare contenuta in A risulta $B \subset A$.

Per esempio, il dominio $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ nell'esempio 3.3.6 non gode della proprietà considerata nella proposizione precedente: la circonferenza di centro l'origine e raggio R , per esempio, è la frontiera del cerchio $B_R(0)$, che *non è contenuto in A* . Lo stesso accade per tutte le curve discusse dopo lo stesso esempio.

CAPITOLO 4

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

4.1 Introduzione ed esempi

Le equazioni differenziali ordinarie esprimono una relazione funzionale tra un certo numero di derivate di una funzione (scalare o vettoriale) di una variabile reale $y(t)$ che è l'incognita dell'equazione. Possiamo quindi dire che la forma più generale di un'equazione differenziale ordinaria è la seguente

$$F(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(k)}(t)) = 0. \quad (4.1.1)$$

Il termine *ordinarie* è usato per distinguerle dalle equazioni differenziali *alle derivate parziali* che coinvolgono funzioni di più variabili e le loro derivate parziali. Le equazioni che coinvolgono funzioni vettoriali sono a volte chiamate *sistemi*, e per essi useremo spesso la notazione vettoriale, che è più compatta; se y in (4.1.1) è a valori in \mathbb{R}^n , allora s'intenderà che F è funzione di $(n(k+1) + 1)$ variabili reali, a valori in \mathbb{R}^n . Nel seguito parleremo di equazioni anche nel caso vettoriale, dando enunciati unificati. L'*ordine* di un'equazione differenziale è l'ordine massimo delle derivate che vi compaiono, ad esempio l'ordine dell'equazione (4.1.1) è k .

Osserviamo che in realtà *ogni sistema differenziale si può ricondurre ad un sistema di ordine 1*, a patto di aumentare la dimensione del codominio delle incognite, cioè il numero di equazioni del sistema. Vedremo questo nel caso particolare delle equazioni (scalari) di ordine k qualunque. Per questa ragione, possiamo limitarci a studiare sistemi del primo ordine, senza perdita di generalità.

Nel seguito indicheremo con t la variabile reale indipendente, con y la funzione (scalare o vettoriale) incognita e useremo le lettere I, J per indicare gli intervalli di definizione delle soluzioni. Per prima cosa, definiamo in modo dettagliato che cosa si intende per *soluzione* di un'equazione differenziale.

Definizione 4.1.1 (Soluzioni locali, massimali, globali) Siano $A \subset \mathbb{R}^{2n+1}$, $F : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funzione continua, e consideriamo l'equazione differenziale $F(t, y, y') = 0$ e la funzione $u : I \rightarrow \mathbb{R}^n$.

1. La funzione u è una soluzione locale se il suo dominio I è un intervallo reale, u è derivabile in I , il punto $(t, u(t), u'(t))$ appartiene ad A per ogni $t \in I$, e vale l'eguaglianza $F(t, u(t), u'(t)) = 0$ per ogni $t \in I$.

2. Si dice che la funzione $v : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ è un prolungamento della soluzione locale u se v è a sua volta una soluzione locale, l'intervallo J include I e $v(t) = u(t)$ per ogni $t \in I$; se J include propriamente I si dice che v è un prolungamento proprio.
3. Si dice che u è una soluzione massimale se è una soluzione locale e non ammette prolungamenti propri.
4. Se $A = J \times \mathbb{R}^{2n}$, con $J \subset \mathbb{R}$ intervallo, si dice che $u : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ è soluzione globale se è soluzione locale e $I = J$.
5. Si dice integrale generale, o soluzione generale, l'insieme di tutte le soluzioni massimali.

Nel seguito, col termine soluzione privo di ulteriori specificazioni intenderemo sempre una soluzione locale.

Data un'equazione differenziale, affronteremo i seguenti problemi:

1. Esistono soluzioni?
2. In caso affermativo, si può dire quante sono?
3. Si possono dare condizioni affinché la soluzione esista e sia unica?
4. Le soluzioni trovate sono sempre globali, o almeno massimali?
5. Per quali classi di equazioni si possono dare dei metodi di calcolo delle soluzioni?

Indichiamo il tipo di risultati che ci si può attendere nel seguente esempio.

Esempio 4.1.2 In generale un'equazione può non avere alcuna soluzione. Per esempio, l'equazione $(y')^2 = -e^y$ non ha alcuna soluzione (il primo membro è ≥ 0 e il secondo è < 0).

Si verifica facilmente che anche l'equazione $y' = f(t)$ con $f(t) = -1$ per $t < 0$ e $f(t) = 1$ per $t \geq 0$ non ha soluzioni definite in un intervallo contenente il punto 0.

Tipicamente, se un'equazione ha soluzioni esse sono infinite. Per esempio, la più semplice equazione differenziale del primo ordine, $y' = f(t)$, dove f è una funzione continua in un intervallo I , ha per soluzione generale l'integrale indefinito di f , a norma del Teorema fondamentale del calcolo; in altri termini, fissato $t_0 \in I$:

$$y' = f(t) \quad \implies \quad y(t) = \int_{t_0}^t f(s)ds + c_0$$

con $c_0 \in \mathbb{R}$ costante arbitraria. Analogamente

$$y'' = f(t) \quad \implies \quad y(t) = \int_{t_0}^t \left(\int_{t_0}^{\tau} f(s)ds \right) d\tau + c_1 t + c_0$$

con $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$ costanti arbitrarie. Allo stesso modo, la soluzione dell'equazione $y^{(k)} = f(t)$ dipende da k parametri, o, più precisamente, da un polinomio arbitrario di grado $k - 1$. Vedremo che questo è un fatto generale: la soluzione di un'equazione differenziale di ordine k dipende da k costanti arbitrarie, e se ne può selezionare una assegnando k condizioni indipendenti. Vedremo nel prossimo paragrafo alcuni risultati che assicurano l'esistenza e l'unicità della soluzione di un problema standard costituito da un'equazione differenziale ed opportune altre condizioni.

Le soluzioni delle equazioni differenziali, anche semplici, in generale non sono globali. Per esempio, vedremo (vedi Paragrafo 4.4.a) che l'integrale generale dell'equazione $y' = y^2$ è dato da $u(t) = 1/(c - t)$, al variare di $c \in \mathbb{R}$, e nessuna di queste funzioni è definita in \mathbb{R} , malgrado il dominio di $F(t, y, y') = y' - y^2$ sia $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ ed F sia regolare (vedi Osservazione 4.2.8).

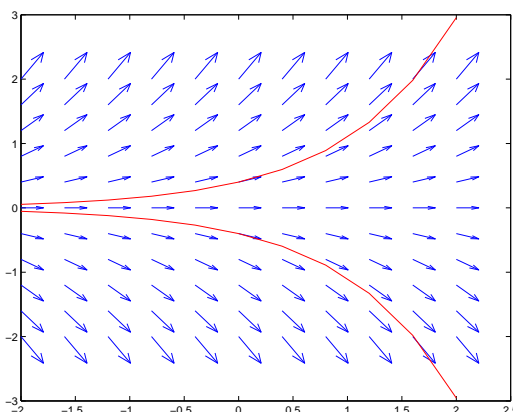
4.2 Teoremi di esistenza

L'equazione (4.1.1) è troppo generale per poter ottenere risultati significativi, quindi considereremo, nella trattazione generale, solo equazioni *in forma normale*, cioè del tipo

$$y' = f(t, y) \quad (4.2.2)$$

con f continua. Nel caso delle equazioni del primo ordine $y' = f(t, y)$, la funzione $f(t, y)$ assegna ad ogni punto del piano (t, y) una direzione, quella della retta il cui coefficiente angolare è $f(t, y)$. Quindi, in termini geometrici, cercare una soluzione dell'equazione vuol dire cercare le curve (anzi i grafici) Γ tali che, in ogni loro punto, la retta tangente a Γ abbia coefficiente angolare uguale a $f(t, y)$.

Ad esempio l'equazione differenziale $y' = y$ ha la seguente interpretazione geometrica.



In questa Sezione daremo inizialmente un teorema generale di esistenza *globale* ed unicità per equazioni o sistemi a crescita al più lineare con una condizione iniziale.

Definizione 4.2.1 (Problema di Cauchy) Sia $A \subset \mathbb{R}^{n+1}$ aperto, ed $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua; si dice problema di Cauchy la coppia di equazioni

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (4.2.3)$$

dove $(t_0, y_0) \in A$.

Per prima cosa, notiamo che il problema di Cauchy precedente è equivalente ad un'equazione integrale.

Lemma 4.2.2 Siano $A \subset \mathbb{R}^{n+1}$ aperto, $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua e $(t_0, y_0) \in A$; siano inoltre I un intervallo reale contenente t_0 e $u : I \rightarrow \mathbb{R}^n$. Sono equivalenti:

(i) $u \in C^1(I)$ è soluzione del problema di Cauchy (4.2.3).

(ii) u è continua in I e verifica l'equazione

$$u(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds, \quad t \in I. \quad (4.2.4)$$

DIM. (i) \Rightarrow (ii). Per il teorema fondamentale del calcolo, dal momento che vale (4.2.3), risulta

$$u(t) = u(t_0) + \int_{t_0}^t u'(s) ds = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds$$

per ogni $t \in I$.

(ii) \Rightarrow (i). Poiché u ed f sono continue, la funzione $s \mapsto f(s, u(s))$ è continua e quindi integrandola tra t_0 e t si ottiene una funzione $C^1(I)$. Siccome vale (4.2.4), anche u è di classe $C^1(I)$ e risulta $u(t_0) = y_0$. Per il teorema fondamentale del calcolo, la derivata di u è uguale all'integrando, cioè vale $u'(t) = f(t, u(t))$ per ogni $t \in I$ e u è soluzione di (4.2.3). □

L'utilità del lemma precedente consiste nel fatto che la ricerca della soluzione del problema di Cauchy viene ridotta alla ricerca di una funzione solo *continua*, e questo facilita la dimostrazione dell'esistenza della soluzione. Per quanto riguarda l'unicità invece, sarà utile il seguente enunciato, che è un caso particolare di un risultato noto come *Lemma di Gronwall*.

Lemma 4.2.3 (Gronwall) Siano $L > 0$, I un intervallo, $t_0 \in I$ e $w : I \rightarrow [0, +\infty)$ una funzione continua. Se

$$w(t) \leq L \left| \int_{t_0}^t w(s) ds \right| \quad \forall t \in I$$

allora $w(t) = 0$ per ogni $t \in I$.

DIM. Ragioniamo dapprima per $t \geq t_0$. Posto, per ogni $\varepsilon > 0$,

$$v_\varepsilon(t) = \varepsilon + L \int_{t_0}^t w(s) ds,$$

risulta $v'_\varepsilon(t) = Lw(t)$, e, per ipotesi, $v'_\varepsilon/v_\varepsilon \leq L$, per cui:

$$\log \frac{v_\varepsilon(t)}{\varepsilon} = \int_{t_0}^t \frac{v'_\varepsilon(s)}{v_\varepsilon(s)} ds \leq L(t - t_0)$$

e quindi $w(t) \leq v_\varepsilon(t) \leq \varepsilon \exp\{L(t - t_0)\}$ per ogni $t \in I$, $t \geq t_0$. Per l'arbitrarietà di ε segue $w = 0$.

Per $t \leq t_0$, basta applicare il ragionamento precedente alla funzione $v(t) = w(t_0 - t)$.

\boxed{QED}

Possiamo ora provare il principale risultato di esistenza ed unicità per il problema di Cauchy.

Teorema 4.2.4 (Esistenza globale in intervalli compatti) *Siano $A = [a, b] \times \mathbb{R}^n$ ed $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funzione continua. Supponiamo che esista una costante $L > 0$ tale che valga la condizione*

$$\|f(t, y) - f(t, z)\| \leq L\|y - z\| \quad \forall t \in [a, b], y, z \in \mathbb{R}^n. \quad (4.2.5)$$

Allora, per ogni $(t_0, y_0) \in A$ esiste un'unica soluzione globale del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (4.2.6)$$

DIM. A norma del Lemma 4.2.2, cercheremo una funzione continua $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ tale che valga (4.2.4). Tale funzione sarà ottenuta come limite uniforme di una successione di funzioni continue, e, poiché l'integrale vettoriale nel membro destro è eseguito come al solito componente per componente, useremo il fatto che i risultati visti nell'ultimo Capitolo delle dispense di Analisi Matematica I si estendono al caso vettoriale (vedi Osservazione 1.4.2).

Definiamo per ricorrenza la successione di funzioni:

$$u_0(t) = y_0, \quad u_{h+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, u_h(s)) ds, \quad h \in \mathbb{N},$$

e proviamo che converge uniformemente in $[a, b]$ alla soluzione (unica) di (4.2.6). Posto $M = \max\{\|f(t, y_0)\| : t \in [a, b]\}$, il primo passo è la dimostrazione, per induzione, della seguente disuguaglianza:

$$\|u_h(t) - u_{h-1}(t)\| \leq \frac{ML^{h-1}|t - t_0|^h}{h!}, \quad h \geq 1, t \in [a, b]. \quad (4.2.7)$$

La disuguaglianza è ovvia per $h = 1$:

$$\|u_1(t) - u_0(t)\| \leq \left| \int_{t_0}^t \|f(s, y_0)\| ds \right| \leq M|t - t_0|.$$

Supposta vera la (4.2.7) per un certo valore h , proviamola per il valore $h + 1$. Risulta:

$$\begin{aligned} \|u_{h+1}(t) - u_h(t)\| &\leq \left| \int_{t_0}^t \|f(s, u_h(s)) - f(s, u_{h-1}(s))\| ds \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t L \|u_h(s) - u_{h-1}(s)\| ds \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t \frac{ML^h |s - t_0|^h}{h!} ds \right| = \frac{ML^h |t - t_0|^{h+1}}{(h+1)!}. \end{aligned}$$

Prendendo l'estremo superiore per $t \in [a, b]$, segue

$$\sup_{t \in [a, b]} \|u_h(t) - u_{h-1}(t)\| \leq \frac{ML^{h-1} |b - a|^h}{h!}, \quad h \geq 1. \quad (4.2.8)$$

Il secondo membro di (4.2.8) è il termine generale di una serie numerica convergente, e quindi per il criterio di convergenza totale di Weierstrass la serie

$$\sum_{h=1}^{\infty} (u_h(t) - u_{h-1}(t)) \quad (4.2.9)$$

converge uniformemente in $[a, b]$. Poiché sussiste la seguente ovvia relazione tra i termini della successione $(u_h)_h$ e la successione delle somme parziali di (4.2.9)

$$u_h(t) = y_0 + \sum_{k=1}^h (u_k(t) - u_{k-1}(t)),$$

la convergenza uniforme della (4.2.9) equivale alla convergenza uniforme della successione $(u_h)_h$ in $[a, b]$. Detta $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ la funzione limite, u è una funzione continua in $[a, b]$ per il Teorema sulla continuità del limite. Inoltre, per la condizione (4.2.5) risulta

$$\|f(t, u_h(t)) - f(t, u(t))\| \leq L \|u_h(t) - u(t)\|$$

e quindi anche la successione $(f(t, u_h(t)))_h$ converge ad $f(t, u(t))$ uniformemente in $[a, b]$. Per il Teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale allora

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t f(s, u_h(s)) ds = \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds$$

per ogni $t \in [a, b]$ e quindi si può passare al limite per $h \rightarrow \infty$ nell'equazione che definisce u_h , ottenendo che la funzione u verifica l'equazione (4.2.4) e quindi risolve il problema di Cauchy (4.2.6).

Resta da provare l'unicità della soluzione. Se $v \in C([a, b])$ è un'altra soluzione, anch'essa verifica (4.2.4), e quindi, posto $w(t) = \|u(t) - v(t)\|$, risulta:

$$w(t) \leq \left| \int_{t_0}^t \|f(s, u(s)) - f(s, v(s))\| ds \right| \leq L \left| \int_{t_0}^t w(s) ds \right|.$$

Per il Lemma 4.2.3, si ha allora $w = 0$, quindi $u = v$ e la soluzione è unica. □

Le ipotesi del teorema precedente sono piuttosto restrittive, ed infatti consentono una conclusione ottimale, cioè l'esistenza di una soluzione globale. In condizioni per certi versi più generali si ottiene una conclusione più debole.

Teorema 4.2.5 (Esistenza locale) *Siano $A \subset \mathbb{R}^{n+1}$ aperto ed $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funzione continua con derivate continue rispetto alle ultime n variabili. Allora, per ogni $(t_0, y_0) \in A$ esiste un'unica soluzione massimale del problema di Cauchy (4.2.6).*

Osservazione 4.2.6 (Regolarità delle soluzioni) Se $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ è soluzione del sistema $y' = f(t, y)$ con f continua in A , allora $f(t, y(t))$ è una funzione continua, e dunque $y \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$. Se $f(t, y) \in C^1(A, \mathbb{R}^n)$, allora $f(t, y(t))$ è una funzione appartenente a $(C^1(I))^n$, e dunque $y \in (C^2(I))^n$. Per induzione si verifica che, se $f \in C^k(A, \mathbb{R}^n)$, allora $y \in C^{k+1}(I, \mathbb{R}^n)$. In particolare se $f \in C^\infty$ allora $y \in C^\infty$.

Anche se A è del tipo $I \times \mathbb{R}^n$, con I intervallo non compatto (quindi non chiuso o non limitato, possibilmente anche coincidente con \mathbb{R}), in generale, la soluzione fornita dal teorema precedente non è globale. Sotto ulteriori condizioni si ha esistenza di soluzioni globali.

Teorema 4.2.7 (Esistenza globale in intervalli qualunque) *Siano $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo, $A = I \times \mathbb{R}^n$ ed $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funzione continua. Se per ogni compatto $K \subset I$ esistono due costanti $p, q > 0$ tali che*

$$\|f(t, y)\| \leq p + q\|y\| \quad \forall t \in K, y \in \mathbb{R}^n, \quad (4.2.10)$$

allora tutte le soluzioni massimali dell'equazione $y' = f(t, y(t))$ sono globali. Se inoltre f ha derivate continue rispetto alle ultime n variabili, allora per ogni dato iniziale la soluzione globale è unica.

Osservazione 4.2.8 Il risultato precedente è basato sull'ipotesi che la funzione f abbia una crescita, per $|y| \rightarrow +\infty$, al più di ordine 1. Nel caso dell'equazione $y' = y^2$ discussa nell'esempio 4.1.2, l'ordine d'infinito della f per $|y| \rightarrow +\infty$ è 2, ed infatti non c'è esistenza globale. La condizione di crescita lineare è verificata anche sotto le ipotesi del Teorema 4.2.4, dal momento che (4.2.5) implica (4.2.10), per esempio con

$$p = \sup_{t \in [a, b]} \|f(t, 0)\|, \quad q = L.$$

Infatti, risulta

$$\begin{aligned}\|f(t, y)\| &\leq \|f(t, 0)\| + \|f(t, y) - f(t, 0)\| \leq \|f(t, 0)\| + L\|y\| \\ &\leq \sup_{t \in [a, b]} \|f(t, 0)\| + L\|y\| = p + q\|y\|.\end{aligned}$$

Viceversa, se nel Teorema 4.2.4 si parte da $A = I \times \mathbb{R}^n$ con I non compatto e si assume che per ogni compatto $K \subset I$ esista $L > 0$ tale che valga (4.2.5) per ogni (x, y) e (x, z) in $K \times \mathbb{R}^n$, si può ancora provare l'esistenza di soluzioni globali procedendo come nel Teorema 4.2.4. Con la stessa notazione, la successione (u_h) convergerà stavolta *uniformemente sui compatti di I* e non uniformemente su tutto l'intervallo I .

I risultati precedenti sono stati enunciati per i sistemi del primo ordine e non per le equazioni sia perché, senza alcun aggravio di difficoltà, risultano in tal modo più generali, sia perché si possono applicare ad equazioni e sistemi di ordine qualunque con un semplice cambio di variabili. Il risultato che segue riguarda le equazioni (scalari) di ordine qualunque.

Teorema 4.2.9 (Esistenza ed unicità per equazioni di ordine k) *Siano $A \subset \mathbb{R}^{k+1}$ aperto ed $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua con derivate continue rispetto alle ultime k variabili. Allora, per ogni $(t_0, y_0, y_1, \dots, y_{k-1}) \in A$ esiste un'unica soluzione massimale del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y^{(k)}(t) = g(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(k-1)}(t)) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1 \\ \vdots \\ y^{(k-1)}(t_0) = y_{k-1} \end{cases} \quad (4.2.11)$$

Se poi $A = I \times \mathbb{R}^k$, con $I \subset \mathbb{R}$ intervallo, e per ogni compatto $K \subset I$ esistono due costanti $p, q > 0$ tali che

$$|g(t, y)| \leq p + q\|y\| \quad \forall t \in K, y \in \mathbb{R}^k, \quad (4.2.12)$$

allora tutte le soluzioni massimali dell'equazione $y^{(k)}(t) = g(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(k-1)}(t))$ sono globali.

DIM. Basta scrivere l'equazione in forma di sistema del primo ordine, e il problema di Cauchy (4.2.11) come (4.2.6), per poi applicare i Teoremi 4.2.5, 4.2.7. Per questo scopo, sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}^k$ definita da

$$f(t, u_1, \dots, u_k) = (u_2, \dots, u_k, g(t, u_1, \dots, u_k))$$

e notiamo che f è di classe $C^1(A)$, dal momento che lo è g . L'equazione in (4.2.11) si scrive allora in forma di sistema (nell'incognita vettoriale $u = (u_1, \dots, u_k)$) nel modo

seguinte:

$$\begin{cases} u'_1 = f_1(t, u_1, \dots, u_k) = u_2, \\ u'_2 = f_2(t, u_1, \dots, u_k) = u_3, \\ \vdots \\ u'_{k-1} = f_{k-1}(t, u_1, \dots, u_k) = u_k, \\ u'_k = f_k(t, u_1, \dots, u_k) = g(t, u_1, \dots, u_k) \end{cases}$$

Analogamente si traducono le condizioni iniziali:

$$u_1(t_0) = y_0, \quad u'(t_0) = y_1, \dots, u^{(k-1)}(t_0) = y_{k-1}$$

ed è quindi possibile applicare il Teorema 4.2.5 visto per i sistemi. Per quanto riguarda l'esistenza globale, fissato K compatto contenuto in I , sono determinate per ipotesi due costanti p, q come in (4.2.12), e si ha

$$\|f(t, u)\| = (u_2^2 + \dots + u_k^2 + (g(t, u))^2)^{1/2} \leq \|u\| + |g(t, u)| \leq p + (1 + q)\|u\|,$$

sicché si può applicare il Teorema 4.2.7. □

4.3 Equazioni lineari

In questa Sezione studiamo un'importante classe di equazioni differenziali, cioè quelle *lineari*. La loro importanza risiede principalmente nel fatto che quasi tutti i modelli concreti, in prima approssimazione, sono lineari. Dal nostro punto di vista, la teoria è completa e va da una descrizione dell'integrale generale valida per tutte le equazioni lineari a coefficienti continui ad un metodo di calcolo esplicito nel caso dei coefficienti costanti. In questo paragrafo, consideriamo fissato un intervallo reale I (che può essere limitato o no). Osserviamo che tutto quello che diremo sulle equazioni lineari si può generalizzare ai *sistemi lineari*, per altro con modifiche non sempre facili. I sistemi lineari, comunque, non saranno trattati in questi appunti.

4.3.a Risultati generali

Definizione 4.3.1 (Operatori differenziali lineari) Date k funzioni continue $a_0, \dots, a_{k-1} : I \rightarrow \mathbb{R}$, definiamo l'operatore differenziale lineare di ordine k a coefficienti a_0, \dots, a_{k-1} ponendo, per ogni $y \in C^k(I)$:

$$Ly = y^{(k)} + a_{k-1}(t)y^{(k-1)} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y \quad (4.3.13)$$

È ovvio dalle proprietà della derivata che Ly è una funzione continua in I e che l'operatore L è lineare fra gli spazi vettoriali (di dimensione *infinita*) $C^k(I)$ e $C(I)$, cioè verifica $L(\alpha y + \beta z) = \alpha Ly + \beta Lz$ per ogni $y, z \in C^k(I)$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. La forma generale di un'equazione differenziale lineare di ordine k è allora

$$Ly = \varphi \quad (4.3.14)$$

dove $\varphi \in C(I)$ ne è il *termine noto*.

Proposizione 4.3.2 (Esistenza di soluzioni) *Tutte le soluzioni massimali dell'equazione $Ly = \varphi$ sono globali.*

DIM. È una semplice applicazione del Teorema 4.2.9. Infatti, l'equazione si può scrivere nella forma $y^{(k)} = g(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(k-1)}(t))$, con $g : I \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ data da

$$g(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(k-1)}(t)) = -(a_{k-1}(t)y^{(k-1)} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y) + \varphi(t);$$

allora, fissato un compatto $K \subset I$, per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz vale la condizione (4.2.12) con $p = \sup_K |\varphi|$ e $q = \sup_K (a_{k-1}^2(t) + \dots + a_1^2(t) + a_0^2(t))^{1/2}$. □

Accanto all'equazione $Ly = \varphi$ considereremo l'*omogenea associata* $Ly = 0$.

Lemma 4.3.3 (Integrale generale) *L'integrale generale V dell'equazione $Ly = \varphi$ è dato dalla somma dell'integrale generale V_0 dell'omogenea associata $Ly = 0$ e di una soluzione particolare della $Ly = \varphi$.*

DIM. Sia v una soluzione particolare (arbitraria) di $Ly = \varphi$. Se u è una qualunque soluzione di $Ly = 0$ allora $u + v$ risolve $Ly = \varphi$. Infatti:

$$L(u + v) = Lu + Lv = \varphi.$$

Questo prova l'inclusione $V_0 + v \subset V$. Viceversa, se v_1 è un elemento di V , allora $v_1 - v \in V_0$, dal momento che

$$L(v_1 - v) = Lv_1 - Lv = 0.$$

□

Il lemma precedente mostra che il problema della ricerca dell'integrale generale di $Ly = \varphi$ si può ricondurre al problema della ricerca dell'integrale generale di $Ly = 0$ e di una soluzione particolare di $Ly = \varphi$. Per quanto riguarda l'integrale generale dell'equazione omogenea, vale il seguente risultato.

Teorema 4.3.4 (Integrale generale dell'omogenea) *L'integrale generale V_0 dell'equazione omogenea $Ly = 0$ è un sottospazio di dimensione k dello spazio $C^k(I)$.*

DIM. Il fatto che V_0 sia un sottospazio vettoriale è ovvio dal corso di Geometria ed Algebra, poiché $V_0 = \text{Ker } L$ ed il nucleo di un'applicazione lineare è sempre un sottospazio vettoriale. Il fatto nuovo è che la dimensione di V_0 è finita (mentre potrebbe essere infinita, essendo infinita la dimensione di $C^k(I)$) ed è proprio uguale all'ordine dell'equazione. Per provare questo, costruiamo una base di V_0 costituita da k funzioni linearmente indipendenti risolvendo i seguenti k problemi di Cauchy:

$$\begin{cases} Ly = 0 \\ y(t_0) = 1 \\ y'(t_0) = 0 \\ \vdots \\ y^{(k-1)}(t_0) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} Ly = 0 \\ y(t_0) = 0 \\ y'(t_0) = 1 \\ \vdots \\ y^{(k-1)}(t_0) = 0 \end{cases} \quad \dots \quad \begin{cases} Ly = 0 \\ y(t_0) = 0 \\ y'(t_0) = 0 \\ \vdots \\ y^{(k-1)}(t_0) = 1 \end{cases}$$

Dette u_1, \dots, u_k le rispettive soluzioni, proviamo che esse sono linearmente indipendenti, cioè che se $u(t) = \sum_{i=1}^k c_i u_i(t) = 0$ per ogni $t \in I$ allora $c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0$. Per questo, basta osservare che tutte le derivate di u sono nulle, e che $u^{(i)}(t_0) = c_{i+1}$, per $i = 0, \dots, k-1$. Per provare che le u_1, \dots, u_k sono un sistema di generatori per V_0 , consideriamo $u \in V_0$ e mostriamo che esistono costanti c_1, \dots, c_k tali che $u(t) = \sum_{i=1}^k c_i u_i(t)$. Fissata allora $u \in V_0$, poniamo $c_i = u^{(i-1)}(t_0)$ e $v(t) = \sum_{i=1}^k c_i u_i(t)$. La funzione v risolve il problema di Cauchy

$$\begin{cases} Ly = 0 \\ y(t_0) = c_1 \\ y'(t_0) = c_2 \\ \vdots \\ y^{(k-1)}(t_0) = c_k \end{cases}$$

la cui soluzione, per la scelta delle c_i , è la funzione u iniziale. Poiché il problema di Cauchy ha un'unica soluzione, risulta $v = u$ ed u è combinazione lineare delle u_i . \square

Date k soluzioni u_1, \dots, u_k dell'equazione $Ly = 0$, definiamo la *matrice Wronskiana*

$$W(t) = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_k \\ u_1' & u_2' & \dots & u_k' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_1^{(k-1)} & u_2^{(k-1)} & \dots & u_k^{(k-1)} \end{pmatrix} \quad (4.3.15)$$

La principale proprietà della matrice W è enunciata nella seguente proposizione.

Proposizione 4.3.5 (Proprietà della matrice Wronskiana) *Se le funzioni u_1, \dots, u_k sono linearmente indipendenti allora la matrice wronskiana (4.3.15) $W(t)$ è invertibile per ogni $t \in I$; viceversa, se $W(t_0)$ è invertibile per un $t_0 \in I$, allora è invertibile per ogni $t \in I$ e le u_1, \dots, u_k sono linearmente indipendenti.*

Notiamo che se le k soluzioni di $Ly = 0$ sono linearmente dipendenti allora $\det W(t) = 0$ per ogni $t \in I$, mentre se sono linearmente indipendenti allora $\det W(t) \neq 0$ (e quindi W è invertibile) per ogni $t \in I$.

Osservazione 4.3.6 Dal Lemma 4.3.3 e dal Teorema 4.3.4 segue che la soluzione generale dell'equazione $Ly = \varphi$ si esprime nella forma

$$u(t) = c_1 u_1(t) + \dots + c_k u_k(t) + v(t),$$

con le notazioni già introdotte. Tenendo conto anche della Proposizione 4.3.2, si ha quindi che, assegnando le k condizioni iniziali $y(t_0) = y_1, \dots, y^{(k-1)}(t_0) = y_k$, esiste un'unica soluzione globale del relativo problema di Cauchy. Per identificarla, bisogna evidentemente determinare i valori delle costanti c_1, \dots, c_k eseguendo le derivate, calcolandole nel punto t_0 ed eguagliandole ai valori prescritti. La matrice del sistema così ottenuto è la matrice wronskiana delle u_i calcolata in t_0 , che sappiamo essere invertibile, così che vengono univocamente determinate le c_i .

Restano da risolvere evidentemente due problemi: calcolare esplicitamente k soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea $Ly = 0$ e calcolare una soluzione particolare dell'equazione completa $Ly = \varphi$. Non esiste un metodo generale per risolvere il primo di questi due problemi, che risolveremo completamente nel caso particolare (ancorché importante) delle equazioni a coefficienti costanti. Affrontiamo nel Paragrafo 4.3.c il secondo, che si può risolvere nel senso seguente: *se sono note k soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea, è possibile usarle per calcolare una soluzione dell'equazione completa*. Prima però trattiamo a parte il caso delle equazioni del primo ordine.

4.3.b Equazioni di ordine 1

L'equazione lineare del primo ordine si può scrivere in generale nella forma

$$y' + a(t)y = \varphi(t) \quad (4.3.16)$$

con a, φ funzioni continue in I . In questo caso esiste una semplice formula risolutiva.

Proposizione 4.3.7 *Fissato $t_0 \in I$, l'integrale generale dell'equazione (4.3.16) è dato dalla formula*

$$u(t) = \exp\left\{-\int_{t_0}^t a(s)ds\right\} \left[c + \int_{t_0}^t \exp\left\{\int_{t_0}^{\tau} a(s)ds\right\} \varphi(\tau)d\tau \right] \quad (4.3.17)$$

al variare di $c \in \mathbb{R}$. Se poi all'equazione è associata la condizione iniziale $y(t_0) = y_0$ si ha

$$u(t) = \exp\left\{-\int_{t_0}^t a(s)ds\right\} \left[y_0 + \int_{t_0}^t \exp\left\{\int_{t_0}^{\tau} a(s)ds\right\} \varphi(\tau)d\tau \right] \quad (4.3.18)$$

DIM. Risolviamo dapprima l'equazione omogenea nella forma $y' = -a(t)y$. Dividendo per y (supposta non nulla) si ha

$$\log |y(t)| - c = \int \frac{y'(t)}{y(t)} dt = - \int a(t) dt;$$

prendendo l'esponenziale di ambo i membri e fissando gli estremi di integrazione si ottiene la soluzione generale $cu_1(t)$, con u_1 data da

$$u_1(t) = \exp\left\{-\int_{t_0}^t a(s)ds\right\}. \quad (4.3.19)$$

Cerchiamo ora una soluzione particolare dell'equazione completa nella forma

$$v(t) = c(t)u_1(t) = c(t) \exp\left\{-\int_{t_0}^t a(s)ds\right\},$$

dove stavolta il coefficiente c (da determinarsi) è pensato variabile. Calcolando v' e sostituendo il risultato in (4.3.16) si ha

$$c'(t)u_1(t) = c'(t) \exp\left\{-\int_{t_0}^t a(s)ds\right\} = \varphi(t)$$

da cui

$$c(t) = \int_{t_0}^t \exp\left\{\int_{t_0}^{\tau} a(s)ds\right\} \varphi(\tau) d\tau. \quad (4.3.20)$$

La soluzione generale $u = cu_1 + v$ ($c \in \mathbb{R}$) dell'equazione completa è dunque data da (4.3.17). Se è assegnata la condizione iniziale $y(t_0) = y_0$, per ottenere (4.3.18) basta imporre che $u(t_0) = y_0$, e si ottiene (4.3.18). \square

Notiamo che nelle formule appena provate è riconoscibile la struttura dell'integrale generale data dal Lemma 4.3.3.

Una forma più compatta dell'integrale generale dell'equazione (4.3.16) si può scrivere nel modo seguente: sia $A(t)$ una primitiva di $a(t)$, allora $u_1(t) = e^{-A(t)}$ è soluzione dell'equazione omogenea e l'integrale generale è:

$$u(t) = e^{-A(t)} \left[c + \int e^{A(t)} \varphi(t) dt \right] \quad c \in \mathbb{R}.$$

4.3.c Metodo di Lagrange o della variazione dei parametri

Questo procedimento per determinare una soluzione particolare v dell'equazione $Ly = \varphi$ è una generalizzazione del procedimento usato nella Proposizione 4.3.7 per le equazioni di ordine 1. In questo caso, supponiamo di conoscere k soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea, siano u_1, \dots, u_k , e cerchiamo v nella forma:

$$v(t) = \sum_{i=1}^k c_i(t) u_i(t). \quad (4.3.21)$$

Sappiamo che se le c_i sono costanti allora la formula precedente fornisce una soluzione dell'equazione omogenea; vogliamo invece considerare le combinazioni lineari *con coefficienti variabili* (4.3.21) per vedere se è possibile determinare k coefficienti in modo da ottenere $Lv = \varphi$. L'idea è di imporre k condizioni alle k funzioni c_i e di risolvere il relativo sistema lineare. Fissate allora k soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea, per esempio le u_i costruite nella dimostrazione del Teorema 4.3.4, prendiamo una v come in (4.3.21) e cerchiamo di determinare in modo opportuno i coefficienti c_i . Imponiamo le k condizioni

$$\sum_{i=1}^k c'_i u_i = 0, \quad \sum_{i=1}^k c'_i u'_i = 0, \quad \dots, \quad \sum_{i=1}^k c'_i u_i^{(k-2)} = 0, \quad \sum_{i=1}^k c'_i u_i^{(k-1)} = \varphi. \quad (4.3.22)$$

Il sistema risultante, nelle incognite c'_i , ha come matrice associata proprio la matrice Wronskiana delle u_i , che, per la Proposizione 4.3.5, è invertibile per ogni $t \in I$ perché le u_i sono state scelte linearmente indipendenti. Il sistema è allora risolubile e, detta $c'_1(t), \dots, c'_k(t)$ la k -pla di soluzioni, si verifica facilmente che, ponendo in (4.3.21) come coefficienti primitive di queste, si ottiene una soluzione di $Ly = \varphi$. Infatti, tenendo conto di (4.3.22), risulta:

$$\begin{aligned} v'(t) &= \sum_{i=1}^k c_i(t) u'_i(t) \\ v''(t) &= \sum_{i=1}^k c_i(t) u''_i(t) \\ &\vdots \\ v^{(k)}(t) &= \sum_{i=1}^k c_i(t) u_i^{(k)}(t) + \sum_{i=1}^k c'_i(t) u_i^{(k-1)}(t) \end{aligned}$$

e, di conseguenza:

$$\begin{aligned} Lv &= v^{(k)} + a_{k-1}(t)v^{(k-1)}(t) + \dots + a_0(t)v(t) \\ &= \left(\sum_{i=1}^k c_i(t) u_i(t) \right)^{(k)} + a_{k-1}(t) \left(\sum_{i=1}^k c_i(t) u_i(t) \right)^{(k-1)} + \dots + a_0(t) \left(\sum_{i=1}^k c_i(t) u_i(t) \right) \\ &= \sum_{i=1}^k c'_i(t) u_i^{(k-1)}(t) + \sum_{i=1}^k c_i L u_i = \varphi(t). \end{aligned}$$

Osservazione 4.3.8 Usando una notazione vettoriale, possiamo riformulare il metodo visto. Definiamo il vettore $U(t) = (u_1(t), \dots, u_k(t))$ le cui componenti sono le k soluzioni linearmente indipendenti e il vettore $C(t) = (c_1(t), \dots, c_k(t))$ dei coefficienti indeterminati, così che risulti $v = C \cdot U$, e il vettore $G(t) = (0, \dots, 0, \varphi(t))$. Le condizioni che abbiamo imposto ai coefficienti si possono scrivere in forma compatta

$$W(t)C'(t) = G(t)$$

e, risolvendo questo sistema lineare e integrando, i coefficienti sono dati da

$$C(t) = \int W^{-1}(t)G(t)dt$$

dove l'integrale vettoriale va eseguito componente per componente. È utile confrontare questo metodo, ed i risultati trovati, con quanto visto nel Paragrafo precedente. In quel caso, $k = 1$ e sia U che C e G sono scalari; per quanto riguarda la matrice wronskiana,

essa si riduce al solo termine u_1 dato da (4.3.19), sicché

$$W^{-1}(t) = \exp\left\{\int a(t)dt\right\}$$

e la formula per C si riduce alla (4.3.20).

4.3.d Equazioni a coefficienti costanti

Come abbiamo detto, non esiste un metodo sistematico per il calcolo esplicito delle soluzioni di un'equazione a coefficienti *continui*, se non per le equazioni del primo ordine (vedi Proposizione 4.3.7). Esiste invece un metodo sistematico per le equazioni a coefficienti *costanti*, cioè quelle in cui i coefficienti a_i in (4.3.13) sono numeri reali. In questo caso, l'intervallo in cui si studia l'equazione è quello in cui è definito il termine noto, ed, in particolare, si può studiare l'equazione omogenea in tutto l'asse reale. Il metodo che presentiamo è basato sulla riduzione del problema ad un problema algebrico, la cui risoluzione è a sua volta basata sul Teorema fondamentale dell'algebra visto nelle dispense di Analisi Matematica I. In questo momento abbiamo bisogno di una sua formulazione più articolata, che descriva completamente le soluzioni di un'equazione algebrica, distinguendo quelle reali da quelle complesse. Ricordiamo la definizione di radice di un polinomio e sua molteplicità.

Definizione 4.3.9 (Radice di un polinomio e molteplicità) *Sia P un polinomio nella variabile λ , sia $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ e sia $r \in \mathbb{N}$. Si dice che λ_0 è radice di P di molteplicità r se P è divisibile per $(\lambda - \lambda_0)^r$ ma non per $(\lambda - \lambda_0)^{r+1}$.*

Ricordiamo il seguente importante risultato, conseguenza del Teorema fondamentale dell'algebra, che precisa il Teorema sui polinomi a coefficienti reali delle dispense di Analisi Matematica I.

Teorema 4.3.10 (Radici dei polinomi) *Sia P un polinomio di grado k a coefficienti reali nella variabile λ .*

- (i) *P ammette $r \geq 0$ radici reali distinte $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ e $2s \geq 0$ radici complesse (non reali) distinte (a due a due coniugate) $\lambda_{r+1}, \dots, \lambda_{r+s}, \bar{\lambda}_{r+1}, \dots, \bar{\lambda}_{r+s}$.*
- (ii) *Dette m_1, \dots, m_r le molteplicità delle radici reali $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ ed m_{r+j} le molteplicità (comuni) delle radici complesse $\lambda_{r+j}, \bar{\lambda}_{r+j}$ (per $j = 1, \dots, s$), si ha*

$$m_1 + \dots + m_r + 2m_{r+1} + \dots + 2m_{r+s} = k.$$

- (iii) *Supposto che il coefficiente di λ^k in $P(\lambda)$ sia 1, esistono numeri reali $p_1, q_1, \dots, p_s, q_s$ tali che*

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \dots (\lambda - \lambda_r)^{m_r} (\lambda^2 + p_1\lambda + q_1)^{m_{r+1}} \dots (\lambda^2 + p_s\lambda + q_s)^{m_{r+s}}. \quad (4.3.23)$$

Osserviamo che il Teorema appena enunciato contiene varie informazioni che conviene commentare. Esso afferma che un polinomio possiede un numero di radici, ove contate con le rispettive molteplicità, pari al suo grado, sicché, per la definizione di radice e di molteplicità, è completamente scomponibile in fattori lineari. Le radici possono esser reali o complesse, ed abbiamo indicato con r il numero delle radici reali e con s il numero delle radici complesse non reali, senza escludere naturalmente che possa accadere che sia $r = 0$ o $s = 0$. Siccome appunto in generale le radici sono *complesse* anche se i coefficienti sono reali, la scomposizione è possibile solo in \mathbb{C} . Inoltre, osserviamo che fin qui quanto detto vale anche per polinomi a coefficienti complessi. Ciò che è peculiare dei polinomi a coefficienti reali è che le radici complesse non reali *si presentano a coppie coniugate*, e questo rende possibile una scomposizione *puramente reale* come in (4.3.23), in cui compaiono fattori di secondo grado con discriminante negativo.

Il Teorema sulle radici dei polinomi ha un'applicazione diretta al calcolo della soluzione generale dell'equazione omogenea a coefficienti costanti. Sussiste infatti il seguente risultato, in cui adoperiamo le medesime notazioni del Teorema 4.3.10.

Teorema 4.3.11 (Integrale generale dell'omogenea a coefficienti costanti) *Data l'equazione a coefficienti reali*

$$Ly = y^{(k)} + a_{k-1}y^{(k-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0, \quad (4.3.24)$$

siano $\lambda_1, \dots, \lambda_r, \lambda_{r+1}, \bar{\lambda}_{r+1}, \dots, \lambda_{r+s}, \bar{\lambda}_{r+s}$ le radici del polinomio

$$P(\lambda) = \lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 \quad (4.3.25)$$

con rispettive molteplicità $m_1, \dots, m_r, m_{r+1}, \dots, m_{r+s}$. Posto $\lambda_{r+j} = \alpha_j + i\beta_j$ per $j = 1, \dots, s$, un sistema di generatori per l'integrale generale dell'equazione (4.3.24) è dato dalle k funzioni

$$\begin{aligned} & e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_1 t}, \dots, t^{m_1-1}e^{\lambda_1 t}, \\ & e^{\lambda_2 t}, te^{\lambda_2 t}, \dots, t^{m_2-1}e^{\lambda_2 t}, \\ & \vdots \\ & e^{\lambda_r t}, te^{\lambda_r t}, \dots, t^{m_r-1}e^{\lambda_r t}, \\ & e^{\alpha_1 t} \cos(\beta_1 t), te^{\alpha_1 t} \cos(\beta_1 t), \dots, t^{m_{r+1}-1}e^{\alpha_1 t} \cos(\beta_1 t), \\ & e^{\alpha_1 t} \sin(\beta_1 t), te^{\alpha_1 t} \sin(\beta_1 t), \dots, t^{m_{r+1}-1}e^{\alpha_1 t} \sin(\beta_1 t), \\ & \vdots \\ & e^{\alpha_s t} \cos(\beta_s t), te^{\alpha_s t} \cos(\beta_s t), \dots, t^{m_{r+s}-1}e^{\alpha_s t} \cos(\beta_s t), \\ & e^{\alpha_s t} \sin(\beta_s t), te^{\alpha_s t} \sin(\beta_s t), \dots, t^{m_{r+s}-1}e^{\alpha_s t} \sin(\beta_s t). \end{aligned}$$

Come si è visto nel teorema precedente, nella ricerca delle soluzioni dell'equazione omogenea ha un ruolo fondamentale il polinomio definito in (4.3.25), che si dice *polinomio caratteristico* associato all'operatore L definito in (4.3.24).

Osservazione 4.3.12 L'enunciato del teorema è indubbiamente complesso, anche per la quantità di parametri necessari per enunciarlo, e merita qualche commento. L'idea, ed il procedimento per il calcolo delle soluzioni dell'equazione $Ly = 0$, è invece semplice.

Il primo passo consiste nell'associare all'operatore L il polinomio $P(\lambda)$ che si ottiene sostituendo formalmente alla derivata di ordine j dell'incognita y la potenza λ^j della variabile λ . Si ottiene un polinomio algebrico di grado k , per il quale vale il Teorema fondamentale dell'algebra e quindi il Teorema 4.3.10.

Il secondo passo è la determinazione delle radici del polinomio P , con le rispettive molteplicità. L'osservazione cruciale che lega le radici alle soluzioni dell'equazione differenziale è la seguente: *se λ_0 è radice di P con molteplicità m allora le funzioni $e^{\lambda_0 t}$, $t e^{\lambda_0 t}$, \dots , $t^{m-1} e^{\lambda_0 t}$ sono soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione $Ly = 0$.* Quest'affermazione è molto facile da verificare, dal momento che è sufficiente sostituire le funzioni indicate al posto dell'incognita y nell'equazione per controllare che l'equazione sia soddisfatta. Osserviamo anche che in questo modo ogni radice di P produce un numero di soluzioni di $Ly = 0$ esattamente uguale alla molteplicità della radice considerata.

Non abbiamo ancora preso in considerazione la differenza tra il caso $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ e il caso $\lambda_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Nel caso $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, poniamo per fissare le idee $\lambda_0 = \alpha + i\beta$, quanto detto è ancora vero, ma la funzione $e^{\lambda_0 t}$ è a valori complessi, e quindi non rientra nella nostra trattazione. Sappiamo però che, essendo i coefficienti di L (e quindi di P) tutti reali, anche il numero $\bar{\lambda}_0 = \alpha - i\beta$ è radice del polinomio. Dalla definizione dell'esponenziale complesso sappiamo che

$$e^{(\alpha \pm i\beta)t} = e^{\alpha t} (\cos(\beta t) \pm i \sin(\beta t)),$$

e quindi ad ogni coppia di soluzioni complesse $e^{\lambda_0 t}$, $e^{\bar{\lambda}_0 t}$ possiamo associare la coppia delle loro combinazioni lineari $e^{\alpha t} \cos(\beta t)$, $e^{\alpha t} \sin(\beta t)$, che, essendo L lineare, sono ancora soluzioni, stavolta *reali*, dell'equazione. In definitiva, ad ogni coppia di soluzioni complesse $t^j e^{\lambda_0 t}$, $t^j e^{\bar{\lambda}_0 t}$ possiamo sostituire le coppie di soluzioni *reali* $t^j e^{\alpha t} \cos(\beta t)$, $t^j e^{\alpha t} \sin(\beta t)$, per ogni $j = 0, \dots, m-1$. In questo modo avremo ottenuto dalle $2s$ radici complesse del polinomio P (a due a due coniugate) un numero di soluzioni dell'equazione differenziale pari alla somma delle loro molteplicità.

È meno facile verificare un altro fatto importante, cioè che le funzioni indicate costituiscono un insieme *linearmente indipendente*. Fatto questo, possiamo concludere che alla fine del procedimento abbiamo trovato, come volevamo, k soluzioni reali linearmente indipendenti, che, per il Teorema 4.3.4, costituiscono una base del nucleo dell'operatore lineare L .

4.3.e Soluzione dell'equazione completa in casi particolari

Il metodo di variazione dei parametri ha il pregio di essere del tutto generale. Inoltre, poiché è basato sulla conoscenza dell'integrale generale dell'equazione omogenea, può senz'altro essere applicato nel caso delle equazioni a coefficienti costanti, caso in cui sappiamo calcolare esplicitamente l'integrale generale dell'equazione omogenea. Il suo

difetto è che richiede molti calcoli, tra cui, come visto nell'Osservazione 4.3.8, il calcolo dell'inversa di una matrice, ed in più il calcolo di k integrali. Se però il termine noto φ è di tipo particolare, è possibile utilizzare, nel caso delle equazioni a coefficienti costanti, un metodo più diretto, anche questo algebrico. Possiamo identificare la classe dei termini noti a cui si applica questo metodo alternativo dicendo che sono *le funzioni che sono soluzioni di qualche equazione lineare omogenea a coefficienti costanti*. A norma del teorema 4.3.11, queste sono le funzioni contenute nella lista presentata nello stesso teorema e le loro combinazioni lineari. Come nel caso dell'equazione omogenea, presentiamo un risultato generale, riservandoci di commentarlo successivamente.

Teorema 4.3.13 *Dato l'operatore L come in (4.3.24), se nell'equazione $Ly = \varphi$ la funzione φ è del tipo*

$$e^{\alpha t} [p_m(t) \cos \beta t + q_n(t) \sin \beta t] \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad (4.3.26)$$

con $p_m(t)$ polinomio di grado m e $q_n(t)$ polinomio di grado n , allora esiste una soluzione particolare $v(t)$ del tipo

$$v(t) = t^h e^{\alpha t} [r_p(t) \cos \beta t + s_p(t) \sin \beta t] \quad (4.3.27)$$

con $p = \max\{n, m\}$, $r_p(t)$ e $s_p(t)$ polinomi di grado p da determinarsi e h uguale alla molteplicità di $\lambda = \alpha + i\beta$ rispetto al polinomio P dato da (4.3.25), con $h = 0$ se λ non è radice di P .

Non dimostriamo questo teorema, che vogliamo comunque commentare brevemente. Come anticipato, l'ipotesi è che esista un operatore differenziale lineare a coefficienti costanti M tale che $M\varphi = 0$. Ne segue che, se v è soluzione di $Lv = \varphi$, allora, applicando iterativamente gli operatori M ed L si ottiene $MLv = M\varphi = 0$, sicché v va cercata nel nucleo di ML , ossia è combinazione lineare dei generatori di tale nucleo. Queste considerazioni suggeriscono che il problema della determinazione di v si può ricondurre ad un problema algebrico, come quello del calcolo della soluzione generale di un'equazione omogenea.

Osservazioni 4.3.14

1. Se il termine noto φ è *somma* di due funzioni del tipo (4.3.26), allora v sarà somma di due funzioni del tipo (4.3.27), con i corrispondenti parametri.
2. La formula (4.3.26) esprime il caso più generale, e naturalmente, specializzando i parametri, comprende vari casi particolari che semplificano l'espressione (4.3.27):
 - (i) $\varphi = p_m$ polinomio: questo accade se $\lambda = \alpha + i\beta = 0$
 - (ii) φ esponenziale, se $m = \beta = 0$, o $\varphi(t) = p_m(t)e^{\alpha t}$, se solo $\beta = 0$.
 - (iii) φ funzione trigonometrica, se $n = \alpha = 0$, o φ prodotto di un polinomio per una funzione trigonometrica, se solo $\alpha = 0$.

3. Un caso particolare rilevante si verifica quando λ non è radice di P : in questo caso in (4.3.27) $h = 0$ e la soluzione v ha un grado, nella sua parte polinomiale, non superiore al grado di φ .
4. Operativamente, si procede così. Si controlla se $\lambda = \alpha + i\beta$ è radice di P o no: in caso affermativo, si registra la sua molteplicità h che entrerà in v ; in caso negativo, il termine t^h in (4.3.27) non compare. Si determinano i gradi m ed n dei polinomi p_m e q_n , ed il più grande fra loro, indicato con p ; ciò fatto, si scrivono due polinomi di grado p , a coefficienti indeterminati, che sono r_p ed s_p in (4.3.27). Gli altri parametri (α e β) sono di immediata determinazione, e quindi si possiede l'espressione esplicita di v . A quel punto, restano da determinare i coefficienti di r_p ed s_p . Per questo, si sostituisce v al posto dell'incognita in Ly e si eguaglia il risultato a φ . In questo modo si ottiene un sistema le cui incognite sono i coefficienti di r_p ed s_p , che il teorema assicura essere risolubile.

4.4 Altre equazioni integrabili elementarmente

In questa Sezione presentiamo alcune importanti classi di equazioni differenziali ordinarie non lineari del 1° e del 2° ordine per le quali è noto il metodo di risoluzione.

4.4.a Equazioni a variabili separabili

L'equazione differenziale del 1° ordine del tipo

$$y' = f(t)g(y), \quad (4.4.28)$$

dove f e g sono funzioni definite e continue negli intervalli aperti I e J rispettivamente, è detta *a variabili separabili*.

Supponendo $g(y) \neq 0$ per ogni $y \in J$ e dividendo per $g(y)$ ambo i membri della equazione (4.4.28), si ha

$$\frac{y'(t)}{g(y(t))} = f(t);$$

da cui, integrando rispetto a t , si ottiene

$$\int \frac{y'(t)}{g(y(t))} dt = \int f(t) dt$$

(o equivalentemente, osservando che $dy = y'(t)dt$, $\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(t) dt$).

Indicata con G una primitiva di $\frac{1}{g}$ in J e con F una primitiva di f in I , dall'equazione precedente si ricava

$$G(y(t)) = F(t) + c, \quad (4.4.29)$$

con c parametro reale. Abbiamo così dimostrato che ogni funzione derivabile $y(t)$ che soddisfa (4.4.29) è soluzione dell'equazione differenziale (4.4.28). In particolare la (4.4.29) rappresenta una famiglia di soluzioni in *forma implicita* della (4.4.28). Se la funzione G è anche invertibile, allora tale famiglia di soluzioni è data in *forma esplicita* da

$$y(t) = G^{-1}(F(t) + c)$$

con c parametro reale.

Si osservi che se $g(y_0) = 0$ per qualche $y_0 \in J$, allora la funzione costante $y_0(t) = y_0$, $t \in I$, è anche una soluzione dell'equazione differenziale (4.4.28), detta *soluzione stazionaria*, non appartenente alla famiglia di soluzioni definita da (4.4.29). Inoltre, si tenga presente che, in alcuni casi, le equazioni differenziali a variabili separabili potrebbero ammettere soluzioni non stazionarie differenti da quelle definite da (4.4.29). Per esempio, per l'equazione differenziale

$$y' = y^{2/3}$$

il metodo delle separazioni delle variabili fornisce le soluzioni $y(t) = \frac{(t+c)^3}{27}$. Ma tale equazione ammette come soluzioni anche la soluzione stazionaria $y_0(t) = 0$ e le funzioni del tipo

$$y(t) = \begin{cases} \frac{(t-a)^3}{27} & \text{se } t < a \\ 0 & \text{se } a \leq t \leq b \\ \frac{(t-b)^3}{27} & \text{se } t > b \end{cases}$$

con $a < 0 < b$.

Esempio 4.4.1 La seguente equazione differenziale del 1° ordine

$$y' = y^2 \log t$$

è chiaramente a variabili separabili. In particolare, essa ammette come soluzione la funzione identicamente nulla $y_0(t) = 0$, $t > 0$ (*soluzione stazionaria*). Inoltre, separando le variabili come sopra esposto si ha

$$\frac{dy}{y^2} = \log t dt;$$

da cui, integrando, si ottiene

$$-\frac{1}{y} = t(\log t - 1) + c.$$

Ne segue che tutte le altre soluzioni dell'equazione data sono della forma

$$y(t) = \frac{1}{t(1 - \log t) + C} \text{ con } t > 0 \text{ e } C \text{ costante arbitraria.}$$

Osservazione 4.4.2 Equazioni differenziali del 1° ordine del tipo

$$y' = g(at + by), \quad (4.4.30)$$

con g funzione definita e continua in un intervallo aperto J e $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, sono immediatamente riconducibili al caso delle equazioni differenziali a variabili separabili. Infatti, posto $z(t) = at + by(t)$ cosicché $z'(t) = a + by'(t)$, la (4.4.30) diventa

$$z' = bg(z) + a$$

che è una equazione differenziale del primo ordine a variabili separabili.

4.4.b Equazioni omogenee

L'equazione differenziale del 1° ordine del tipo

$$y' = g\left(\frac{y}{t}\right), \quad (4.4.31)$$

con g funzione definita e continua in un intervallo aperto J , è detta *omogenea*. Per la risoluzione di questa classe di equazioni differenziali basta fare una opportuna sostituzione. Infatti, posto $z(t) = \frac{y(t)}{t}$ cosicché $y(t) = tz(t)$ e $y'(t) = z(t) + tz'(t)$, la (4.4.31) diventa

$$z + tz' = g(z) \iff z' = \frac{1}{t}(g(z) - z)$$

che è una equazione differenziale a variabili separabili il cui metodo di risoluzione è stato dato in 4.4.a.

Riconducibili alla classe delle equazioni differenziali omogenee sono le equazioni differenziali del 1° ordine del seguente tipo

$$y' = g\left(\frac{at + by + c}{a't + b'y + c'}\right), \quad (4.4.32)$$

con g funzione definita e continua in un intervallo aperto J e $a, a', b, b', c, c' \in \mathbb{R}$.

Osserviamo che possono presentarsi i seguenti casi:

1. se $a = a' = b = b' = 0$ e $c' \neq 0$, allora la (4.4.32) diventa

$$y' = g\left(\frac{c}{c'}\right)$$

e quindi ammette come soluzione le funzioni del tipo $y(t) = g\left(\frac{c}{c'}\right)t + C$ al variare di C in \mathbb{R} ;

2. se a, a', b, b' non sono tutti nulli e $a' = ha$, $b' = hb$ per qualche $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, che equivale ad avere $\det \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} = 0$, allora la (4.4.32) diventa una equazione del tipo (4.4.30) per la cui risoluzione basta procedere come indicato nell'Osservazione 4.4.2;
3. se $ab' - a'b \neq 0$, allora la (4.4.32) può essere ricondotta ad una equazione differenziale omogenea con una opportuna sostituzione come è indicato di seguito.

Se $ab' - a'b \neq 0$, allora le rette di equazioni $at + by + c = 0$ e $a't + b'y + c' = 0$ non sono parallele e quindi si intersecano in un solo punto, sia $P_0 = (t_0, y_0)$. Posto

$$s = t - t_0 \quad \text{e} \quad z = y - y_0$$

e dato che $at_0 + by_0 + c = a't_0 + b'y_0 + c' = 0$, si deduce che $z'(s) = \frac{dz}{ds} = \frac{dy}{dt}$ e

$$\begin{aligned} at + by + c &= a(s + t_0) + b(z + y_0) + c = as + bz + (at_0 + by_0 + c) = as + bz, \\ a't + b'y + c' &= a'(s + t_0) + b'(z + y_0) + c' = a's + b'z + (a't_0 + b'y_0 + c') = a's + b'z. \end{aligned}$$

Effettuando tali sostituzioni, la (4.4.32) diventa

$$z' = g\left(\frac{as + bz}{a's + b'z}\right) = g\left(\frac{a + b(z/s)}{a' + b'(z/s)}\right),$$

e si ottiene un'equazione differenziale omogenea.

Esempio 4.4.3 Si consideri la seguente equazione differenziale del 1° ordine

$$y' = \frac{t + y}{t - y}$$

e si osservi che

$$y' = \frac{t \left(1 + \frac{y}{t}\right)}{t \left(1 - \frac{y}{t}\right)} = \frac{1 + \frac{y}{t}}{1 - \frac{y}{t}}.$$

Quindi l'equazione data è di tipo omogeneo cosicché per la sua risoluzione basta effettuare la sostituzione $z(t) = \frac{y(t)}{t}$, ottenendo la seguente equazione differenziale

$$z' = \frac{1}{t} \cdot \frac{1 + z^2}{1 - z}$$

che è a variabili separabili. Separando le variabili e integrando si ottiene

$$\int \frac{1 - z}{1 + z^2} dz = \int \frac{1}{t} dt,$$

cioè

$$\arctan z - \log \sqrt{1+z^2} = \log |t| + c, \text{ con } c \text{ costante arbitraria.}$$

Ricordando che $z(t) = \frac{y(t)}{t}$, si ottiene che l'integrale generale in forma implicita dell'equazione data è il seguente

$$\arctan \frac{y(t)}{t} = \log \sqrt{t^2 + y^2(t)} + c, \text{ con } c \text{ costante arbitraria.}$$

4.4.c Equazioni di Bernoulli

L'equazione differenziale del 1° ordine del tipo

$$y' = a(t)y + b(t)y^\alpha, \quad (4.4.33)$$

dove a e b sono funzioni definite e continue nell'intervallo aperto I e $\alpha \in \mathbb{R}$, è detta *equazione di Bernoulli*.

Osserviamo che se $\alpha = 0$ la (4.4.33) si riduce ad un'equazione differenziale lineare del 1° ordine il cui integrale generale è dato da (4.3.17). Invece, se $\alpha = 1$ la (4.4.33) si riduce ad un'equazione differenziale del 1° ordine a variabili separabili il cui metodo di risoluzione è stato dato in 4.4.a. Inoltre per un qualsiasi $\alpha > 0$, la (4.4.33) ammette come soluzione la funzione identicamente nulla. Per questo nel seguito supporremo che α non sia né 0 né 1 e trascureremo tra le soluzioni la funzione identicamente nulla.

Il metodo di risoluzione per le equazioni differenziali di Bernoulli è il seguente.

Dividendo ambo i membri di (4.4.33) per y^α , si ha

$$\frac{y'}{y^\alpha} = a(t)y^{1-\alpha} + b(t);$$

da qui, posto $z(t) = (y(t))^{1-\alpha}$, cosicché $z'(t) = (1-\alpha)(y(t))^{-\alpha}y'(t)$, segue che

$$\frac{z'}{1-\alpha} = a(t)z + b(t) \iff z' = (1-\alpha)a(t)z + (1-\alpha)b(t). \quad (4.4.34)$$

L'equazione (4.4.34) così ottenuta è chiaramente un'equazione differenziale lineare del primo ordine e quindi, per (4.3.17), il suo integrale generale è dato dalla seguente formula

$$z(t) = \exp\left\{-\int (\alpha-1)a(t)dt\right\} \left[c + \int \exp\left\{\int (\alpha-1)a(s)ds\right\} (1-\alpha)b(t)dt \right] \quad (4.4.35)$$

al variare di $c \in \mathbb{R}$.

A questo punto, ricordando che $z(t) = (y(t))^{1-\alpha}$, da (4.4.35) si ottiene l'integrale generale dell'equazione differenziale di Bernoulli (4.4.33).

Esempio 4.4.4 La seguente equazioni differenziale del 1° ordine

$$y' = 2y + ty^2$$

è di tipo Bernoulli con $\alpha = 2$. Dividendo ambo i membri per y^2 e ponendo $z(t) = (y(t))^{-1}$, si ottiene

$$-z' = 2z + t \iff z' + 2z = -t.$$

Per (4.3.17) l'integrale generale dell'equazione differenziale lineare del 1° ordine così ottenuta è dato da

$$z(t) = e^{-2t} \left[c - \int e^{2t} t dt \right] = e^{-2t} \left[c - \frac{1}{2} e^{2t} t + \frac{1}{4} e^{2t} \right].$$

A questo punto, ricordando che $z(t) = (y(t))^{-1}$, si ottiene che l'integrale generale dell'equazione proposta è il seguente

$$y(t) = \frac{1}{e^{-2t} \left[c - \frac{1}{2} e^{2t} t + \frac{1}{4} e^{2t} \right]}.$$

4.4.d Equazioni differenziali non lineari del 2° ordine

Equazioni della forma $y'' = f(t, y')$ L'equazione differenziale del 2° ordine del tipo

$$y'' = f(t, y'), \quad (4.4.36)$$

dove f è una funzione continua con derivata continua rispetto alla seconda variabile in un aperto $A \subset \mathbb{R}^2$, si riduce ad un'equazione differenziale del 1° ordine ponendo $z(t) = y'(t)$, cosicché $z'(t) = y''(t)$. Infatti, effettuando tali sostituzioni la (4.4.36) diventa

$$z' = f(t, z),$$

il cui metodo di risoluzione dipende dalla forma analitica di f , come dimostra il seguente esempio.

Esempio 4.4.5 Si consideri la seguente equazione differenziale del 2° ordine

$$y'' = (y')^2 + 1.$$

Posto $z(t) = y'(t)$, essa si riduce ad un'equazione differenziale del 1° ordine a variabili separabili. Infatti, diventa

$$z' = z^2 + 1,$$

da cui, separando le variabili e integrando, si ottiene

$$\arctan z = t + c \iff z = \tan(t + c) \text{ con } c \text{ costante arbitraria.}$$

Di conseguenza, l'integrale generale dell'equazione differenziale data è il seguente

$$y(t) = -\log |\cos(t + c)| + d \text{ con } c \text{ e } d \text{ costanti arbitrarie.}$$

Equazioni del secondo ordine autonome Le equazioni differenziali del 2° ordine del tipo

$$y'' = f(y, y'), \quad (4.4.37)$$

sono dette *autonome* perché la variabile t non vi compare esplicitamente e quindi, pensando al solito alla t come variabile temporale, sono tipici modelli di un sistema privo di termini forzanti, il cui comportamento è interamente governato dallo stato del sistema stesso.

Supposto che f sia una funzione di classe C^1 in un aperto $A \subset \mathbb{R}^2$, l'equazione data si risolve integrando successivamente due equazioni differenziali del 1° ordine, in una delle quali la funzione incognita dipende dalla variabile y , che viene assunta come variabile indipendente. Infatti, posto

$$z(y(t)) = y'(t) \implies y''(t) = \frac{dy'}{dt}(t) = \frac{dz}{dy}(y(t)) \frac{dy}{dt}(t) = \dot{z}(y)z(y)$$

(dove abbiamo indicato con \dot{z} la derivata di z rispetto ad y), la (4.4.37) diventa

$$z\dot{z} = f(y, z), \quad (4.4.38)$$

il cui metodo di risoluzione dipende ovviamente dalla forma analitica di f . Ora, supponendo che $z = z(y, c_1)$ sia l'integrale generale di (4.4.38) con $c_1 \in \mathbb{R}$ e ricordando che $z = y'$, si perviene alla seguente equazione differenziale del 1° ordine a variabili separabili:

$$y' = z(y, c_1),$$

il cui metodo di risoluzione è dato in 4.4.a e le cui soluzioni sono tutte e sole quelle di (4.4.37).

Esempio 4.4.6 Si consideri il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' = y'(1 + y) \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 4. \end{cases} \quad (4.4.39)$$

Effettuando la sostituzione $z(y(t)) = y'(t)$ come sopra indicato, il problema di Cauchy (4.4.39) diventa

$$\begin{cases} z\dot{z} = z(1 + y) \\ z(2) = 4 \end{cases}$$

(osservare la nuova condizione iniziale). Oltre alla soluzione costante $z(y) = 0$, che non verifica la condizione iniziale, l'equazione ammette come soluzioni le funzioni del tipo

$$z(y) = y + \frac{1}{2}y^2 + C_1 \iff y' = y + \frac{1}{2}y^2 + C_1, \text{ con } C_1 \text{ costante arbitraria.}$$

Di conseguenza, per la condizione iniziale su z , la soluzione di (4.4.39) soddisfa la seguente equazione differenziale

$$y' = y + \frac{1}{2}y^2 \iff y' = \frac{1}{2}(y^2 + 2y).$$

A questo punto, separando le variabili e integrando, si ottiene

$$\int \frac{2}{(y+2)y} dy = \int dt;$$

da qui segue, usando i fratti semplici per calcolare l'integrale in y ,

$$\log\left(\frac{y}{y+2}\right) = t + C_2 \implies \frac{y(t)}{y(t)+2} = k e^t, \text{ con } k \text{ costante arbitraria.}$$

Infine, dalla condizione iniziale $y(0) = 2$ si ricava $k = \frac{1}{2}$ e la soluzione di (4.4.39) è la funzione

$$y(t) = \frac{2e^t}{2 - e^t}.$$

Un caso particolare dell'equazione (4.4.37) è

$$y'' = f(y),$$

in cui non compare esplicitamente la y' . Col metodo visto, si ha successivamente $z(y) = y'(t)$, $y'' = z\dot{z}$ e quindi

$$\int z dz = \int f(y) dy$$

da cui, se l'integrale al secondo membro è positivo,

$$(y')^2 = 2 \int f(y) dy \implies y' = \sqrt{2 \int f(y) dy},$$

che è un'equazione a variabili separabili.

Esempio 4.4.7 Consideriamo il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' = 2y^3 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Posto $z(y) = y'(t)$, risulta, procedendo come detto si ottiene:

$$\begin{cases} z\dot{z} = 2y^3 \\ z(1) = 1 \end{cases}$$

e quindi $z(y) = y^2$, da cui il problema

$$\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

che ha soluzione $y(t) = \frac{1}{1-t}$.

CAPITOLO 5

INTEGRALI MULTIPLI

Il problema dell'integrazione di funzioni di più variabili reali è molto importante, ad esempio per il calcolo di volumi, di masse, di baricentri, di momenti d'inerzia, ecc.

In Analisi Matematica I si è studiato il caso di una sola variabile e la costruzione dell'integrale era basata sulle idee del matematico tedesco Bernhard Riemann (1826-1866) e, per quanto riguarda la teoria della misura associata, dal matematico italiano Giuseppe Peano (1858-1932) e dal matematico francese Camille Jordan (1838-1922). Questa teoria è stata successivamente ampliata, sulla spinta degli sviluppi dell'Analisi funzionale, all'inizio del '900 ad opera soprattutto del matematico francese Henri Lebesgue (1875-1941). Anche in vista delle applicazioni alle trasformate di Fourier e Laplace, presentiamo direttamente la teoria moderna nel caso generale di uno spazio euclideo n -dimensionale. Questa teoria, fra l'altro, ha il vantaggio di assicurare teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale più flessibili dei risultati disponibili nella teoria di Riemann (vedi ad esempio il Teorema 2.8 nella dispensa su Successioni e serie di funzioni). Nel caso $n = 1$ otterremo una generalizzazione della teoria già nota, nel caso $n > 1$ gli esempi più importanti saranno per $n = 2, 3$. La definizione dell'integrale doppio ci permetterà anche di definire integrali su superficie nello spazio, così come si usano gli integrali semplici per definire gli integrali di linea.

5.1 La misura di Lebesgue in \mathbb{R}^n .

In questo paragrafo vediamo come sia possibile definire una nozione di “misura n -dimensionale” per un sottoinsieme E di \mathbb{R}^n . L'idea è quella di assegnare ai “rettangoli”

$$R = [a_1, b_1[\times \cdots \times [a_n, b_n[$$

una misura (lunghezza per $n = 1$, area per $n = 2$, volume per $n = 3, \dots$) uguale a

$$m_n(R) = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) \cdots (b_n - a_n)$$

e poi di definire la misura di un insieme generico mediante ricoprimenti fatti con rettangoli. Per $n = 1$ si tratta evidentemente di intervalli, per $n = 2$ di rettangoli veri e propri, per $n = 3$ di parallelepipedi. Useremo la parola rettangoli, senza introdurre ulteriori termini. Chiameremo invece “plurirettangolo” un'unione finita di rettangoli del tipo detto.

Definizione 5.1.1 Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ un insieme. Definiamo $\overline{m}_n(E)$, misura esterna n -dimensionale di Lebesgue di E , nel seguente modo:

$$\overline{m}_n(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} m_n(R_i) : E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i \right\}.$$

La misura esterna di E si ottiene cercando, tra tutti i ricoprimenti di E mediante successioni di rettangoli n -dimensionali, quello che minimizza la somma dei volumi. Osserviamo che i rettangoli del ricoprimento non sono necessariamente disgiunti.

La misura esterna di Lebesgue ha il vantaggio di essere definita per ogni sottoinsieme di \mathbb{R}^n . Il prezzo di questo è però una perdita di additività: esistono esempi di insiemi limitati E, F di \mathbb{R}^n disgiunti e tali che

$$\overline{m}_n(E \cup F) < \overline{m}_n(E) + \overline{m}_n(F). \quad (5.1.1)$$

Individueremo ora una classe di insiemi, detti insiemi misurabili, sui quali la misura esterna di Lebesgue ha un comportamento migliore.

Definizione 5.1.2 Posto $E \triangle F = (E \setminus F) \cup (F \setminus E)$, diremo che un insieme limitato $E \subset \mathbb{R}^n$ è misurabile se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un plurirettangolo P tale che

$$\overline{m}_n(E \triangle P) < \varepsilon.$$

Se E non è limitato diremo che E è misurabile se $E \cap B_R(0)$ è misurabile per ogni $R > 0$. Indicheremo con $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ la classe dei sottoinsiemi misurabili di \mathbb{R}^n .

Possiamo ora definire mediante restrizione ai misurabili la *misura di Lebesgue in \mathbb{R}^n* :

Definizione 5.1.3 Dato $E \subset \mathbb{R}^n$ misurabile poniamo $m_n(E) = \overline{m}_n(E)$. Il numero $m_n(E)$ è detto *misura di Lebesgue di E* .

Vediamo ora alcune proprietà di stabilità degli insiemi misurabili:

Teorema 5.1.4

- (i) Gli aperti e i chiusi di \mathbb{R}^n sono misurabili.
- (ii) La classe $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ è stabile per omotetie e traslazioni:

$$E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \quad \implies \quad x + E, \lambda E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \lambda > 0.$$

Inoltre $m_n(x + E) = m_n(E)$ e $m_n(\lambda E) = \lambda^n m_n(E)$.

- (iii) Se E è misurabile e F è tale che $\overline{m}_n(E \triangle F) = 0$ allora anche F è misurabile.

(iv) La classe $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ è stabile per unione e intersezione finita o numerabile e passaggio al complementare:

$$\begin{aligned} E, F \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n) &\implies E \cup F, E \cap F, E \setminus F \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \\ E_h \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n) &\implies \bigcup_{h=1}^{\infty} E_h \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n), \bigcap_{h=1}^{\infty} E_h \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

In base al teorema precedente sono misurabili le unioni numerabili di chiusi, le intersezioni numerabili di aperti e così via. La classe degli insiemi misurabili è quindi estremamente ricca.

A confermare questo c'è anche il fatto che i soli esempi di sottoinsiemi di \mathbb{R}^n non misurabili per i quali vale (5.1.1) si ottengono in modo non costruttivo. Tutti gli insiemi “operativamente” costruiti a partire dai chiusi e dagli aperti con operazioni finite o numerabili sono misurabili.

Teorema 5.1.5 *La misura di Lebesgue è numerabilmente additiva su $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$: per ogni E misurabile ed ogni sua partizione in insiemi misurabili E_h si ha*

$$m_n(E) = \sum_{h=1}^{\infty} m_n(E_h).$$

Dal teorema precedente possiamo dedurre altre utili proprietà della misura di Lebesgue:

Corollario 5.1.6 *Per ogni coppia di insiemi $E, F \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ si ha*

$$m_n(E \cup F) + m_n(E \cap F) = m_n(E) + m_n(F).$$

Data una successione crescente di insiemi $(E_h) \subset \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ si ha

$$m_n\left(\bigcup_{h=1}^{\infty} E_h\right) = \lim_{h \rightarrow +\infty} m_n(E_h). \quad (5.1.2)$$

Data una successione decrescente di insiemi $(E_h) \subset \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, si ha

$$m_n(E_1) < +\infty \implies m_n\left(\bigcap_{h=1}^{\infty} E_h\right) = \lim_{h \rightarrow +\infty} m_n(E_h).$$

DIM. Essendo $E \cup F = E \cup (F \setminus E)$ si ha

$$m_n(E \cup F) = m_n(E) + m_n(F \setminus E).$$

Sommando ad ambo i membri $m_n(E \cap F)$ si ottiene

$$\begin{aligned} m_n(E \cup F) + m_n(E \cap F) &= m_n(E) + m_n(F \setminus E) + m_n(E \cap F) \\ &= m_n(E) + m_n(F). \end{aligned}$$

Sia E l'unione degli insiemi E_h . Posto $F_1 = E_1$ e $F_h = E_h \setminus E_{h-1}$ per $h > 1$, gli insiemi F_h sono una partizione di E , quindi

$$\begin{aligned} m_n(E) &= \sum_{i=1}^{\infty} m_n(F_i) = \lim_{h \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^h m_n(F_i) \\ &= \lim_{h \rightarrow +\infty} m_n(E_h). \end{aligned}$$

Sia ora E_h una successione decrescente di insiemi, con $m_n(E_1) < +\infty$, e sia E la loro intersezione. Applicando la formula sopra alla successione crescente $E_1 \setminus E_h$, la cui unione è $E_1 \setminus E$, otteniamo

$$\begin{aligned} m_n(E_1) - m_n(E) &= m_n(E_1 \setminus E) = \lim_{h \rightarrow +\infty} m_n(E_1 \setminus E_h) \\ &= m_n(E_1) - \lim_{h \rightarrow +\infty} m_n(E_h). \end{aligned}$$

Sottraendo $m_n(E_1)$ ad ambo i membri si ha la tesi. \square

Definizione 5.1.7 Chiameremo *insiemi di misura nulla, o trascurabili, gli insiemi $E \subset \mathbb{R}^n$ tali che $\overline{m}_n(E) = 0$. Diremo che una certa proprietà $P(x)$ è vera per m_n -quasi ogni x se l'insieme*

$$\{x \in \mathbb{R}^n : P(x) \text{ è falsa}\}$$

è trascurabile.

Vediamo alcune proprietà degli insiemi trascurabili.

Proposizione 5.1.8 *Ogni sottoinsieme di un insieme trascurabile è trascurabile. L'unione di una successione di insiemi trascurabili è trascurabile. Un insieme E è trascurabile se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un aperto $A_\varepsilon \supset E$ tale che $\overline{m}_n(A_\varepsilon) < \varepsilon$.*

DIM. I primi due enunciati seguono facilmente dalle proprietà (c) della misura esterna. Se E è contenuto in aperti di misura esterna arbitrariamente piccola, per la monotonia della misura esterna deve essere $\overline{m}_n(E) = 0$. Viceversa, se $\overline{m}_n(E) = 0$ allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una successione di rettangoli aperti R_i tale che

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{\infty} m_n(R_i) < \varepsilon.$$

Detta A_ε l'unione dei rettangoli R_i si ha, per la definizione di misura esterna, $\overline{m}_n(A_\varepsilon) < \varepsilon$. \square

In particolare ogni insieme E numerabile (cioè tale che esista un'applicazione surgettiva $x = x_n : \mathbf{N} \rightarrow E$) è trascurabile: infatti la misura esterna di $\{x\}$ (il singoletto

costituito dal solo x) è zero (questo perché $\{x\}$ è contenuto in cubi di volume arbitrariamente piccolo) e dalla numerabile additività di m_n segue che E ha misura nulla. Infatti, data $x : \mathbb{N} \rightarrow E$ surgettiva, si ha

$$E = \bigcup_{h=0}^{\infty} \{x_h\}.$$

In particolare l'insieme dei punti a coordinate razionali \mathbb{Q}^n , essendo numerabile, ha misura nulla.

Anche insiemi “continui” e quindi non numerabili possono avere misura esterna nulla. Ad esempio il segmento $E = (0, 1) \times \{0\}$ in \mathbb{R}^2 ha misura esterna nulla: dato infatti $\varepsilon > 0$ ed un intero h tale che $h\varepsilon > 4$, basta ricoprire E con gli h cubi Q_i centrati in i/h e di lato $1/h$ per avere $\overline{m}_n(E) \leq h \cdot (2/h)^2 = 4/h < \varepsilon$.

5.2 Funzioni misurabili e loro integrazione

L'introduzione di una nozione di misura degli insiemi ha, fra gli altri, lo scopo di definire l'integrale di funzioni sufficientemente regolari. Nel corso di Analisi matematica I è stato introdotto l'integrale di Riemann, definito essenzialmente per funzioni regolari a tratti e limitate con dominio limitato. Ferma restando la richiesta di regolarità, le ipotesi di limitatezza del dominio e della funzione sono state parzialmente rimosse con l'introduzione degli integrali generalizzati. Nel contesto della teoria di Lebesgue la richiesta di regolarità è minore e si basa sulla nozione di funzione misurabile, e si trattano assieme i casi di funzioni e domini limitati o no. La classe di funzioni a cui si può associare un integrale definito sarà molto più ampia e di conseguenza i teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale saranno molto più generali (e questo è uno degli scopi della generalizzazione); per quanto riguarda il confronto con gli integrali generalizzati nel caso di insiemi o funzioni non limitate, ci sono delle differenze che verranno discusse al momento opportuno.

Definizione 5.2.1 Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Diremo che f è misurabile se per ogni $t \in \mathbb{R}$ l'insieme

$$f^{-1}((t, +\infty)) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > t\}$$

è misurabile. A volte indicheremo per brevità l'insieme $f^{-1}((t, +\infty))$ con $\{f > t\}$.

Tutte le funzioni continue su \mathbb{R}^n sono misurabili in quanto $\{f > t\}$ è aperto. Altri esempi di funzioni misurabili sono dati dalle funzioni *caratteristiche*

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in E \\ 0 & \text{se } x \notin E \end{cases} \quad (5.2.3)$$

purché l'insieme E sia misurabile.

Condizioni equivalenti alla misurabilità si hanno imponendo la misurabilità di tutti gli insiemi $\{f \geq t\}$ o, passando ai complementari, la misurabilità di tutti gli insiemi $\{f < t\}$ oppure di tutti gli insiemi $\{f \leq t\}$. Si ha infatti

$$\{f \geq t\} = \bigcap_{h=1}^{\infty} \{f > t - 1/h\} \quad \{f > t\} = \bigcup_{h=1}^{\infty} \{f \geq t + 1/h\}$$

quindi dalla misurabilità degli insiemi con la disuguaglianza stretta si deduce la misurabilità di quelli con la disuguaglianza non stretta e viceversa.

Proposizione 5.2.2 *Siano f, g funzioni misurabili. Allora sono funzioni misurabili le funzioni $\alpha f + \beta g$, fg , la funzione $f \vee g = \max\{f, g\}$, la funzione $f \wedge g = \min\{f, g\}$. Inoltre, se (f_h) è una successione di funzioni misurabili convergenti puntualmente a f , anche f è misurabile. Infine, se f è misurabile e $\{f \neq g\}$ è trascurabile, anche g è misurabile.*

Se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è misurabile, poniamo

$$\|f\|_{\infty} = \inf\{t \geq 0 : m_n(\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| \geq t\}) = 0\}$$

e diciamo che f è *essenzialmente limitata* se $\|f\|_{\infty} < +\infty$. In tal caso, $\|f\|_{\infty}$ si dice *estremo superiore essenziale di f* , denotato anche $\sup \text{ess } u$. Osserviamo che è equivalente porre

$$\|u\|_{\infty} = \inf\{M : |u(x)| \leq M, \forall x \in E \setminus N, m(N) = 0\}.$$

Definizione 5.2.3 *Indicheremo con $\mathcal{S}_+(\mathbb{R}^n)$ l'insieme delle funzioni semplici positive, cioè l'insieme delle funzioni esprimibili nella forma*

$$f(x) = \sum_{i=1}^N z_i \chi_{E_i}(x),$$

con z_1, \dots, z_N positivi e E_1, \dots, E_N misurabili.

Osserviamo che tutte le funzioni semplici sono misurabili. La rappresentazione come combinazione lineare di funzioni caratteristiche non è certo unica: ad esempio

$$\chi_{[-1,1]} + \chi_{[0,2]} + \chi_{(1,3]} = \chi_{[-1,0]} + 2\chi_{[0,2]} + \chi_{(2,3]}.$$

È facile vedere che, aumentando se necessario il numero degli addendi, ogni funzione semplice è rappresentabile nel seguente modo

$$f(x) = \sum_{i=1}^N z_i \chi_{E_i}(x) \quad \text{con } E_i \cap E_j = \emptyset \text{ per } i \neq j. \quad (5.2.4)$$

Definizione 5.2.4 L'integrale secondo Lebesgue di una funzione semplice f è definito dalla formula

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \sum_{i=1}^N z_i m(E_i)$$

ove z_i e E_i sono scelti in modo che valga (5.2.4).

A volte, per sottolineare il fatto che si integra in 2 o 3 variabili useremo le notazioni

$$\int \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy \quad \int \int \int_{\mathbb{R}^3} f(x, y, z) dx dy dz.$$

Osserviamo che il calcolo dell'integrale non dipende dalla rappresentazione in (5.2.4). Estendiamo ora l'operazione di integrazione ad una classe più ampia di funzioni. Premettiamo un risultato di approssimazione che giustifica la definizione.

Teorema 5.2.5 Sia $f \geq 0$ misurabile. Allora esiste una successione di funzioni semplici (f_h) convergente q.o. ad f .

Dim. Sia dapprima f limitata e nulla fuori di un misurabile limitato E . Allora esiste una successione di funzioni semplici (f_h) nulle al di fuori di E e convergente uniformemente a f . Infatti, possiamo prendere ad esempio

$$f_h(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{j}{h} \chi_{E_{j,h}}(x)$$

dove

$$E_{j,h} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \frac{j}{h} \leq f(x) < \frac{j+1}{h} \right\}.$$

Essendo f limitata la somma è in realtà finita quindi le funzioni f_h sono semplici. Infine, per costruzione, $\|f_h - f\|_{\infty} \leq 1/h$ e quindi la successione f_h converge uniformemente ad f .

Se ora f è qualunque, basta considerare per ogni $h \in \mathbf{N}$ la funzione

$$g_h = (f \chi_{B_h}) \wedge h,$$

che è limitata e nulla fuori dalla palla B_h ; la successione (g_h) converge ad f , e dalla prima parte della dimostrazione segue che per ogni h esiste f_h semplice e tale che $\|f_h - g_h\|_{\infty} < 1/h$, e quindi (f_h) è la successione richiesta. \square

Definizione 5.2.6 Sia f misurabile e positiva. Allora poniamo

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} g(x) dx : g \in \mathcal{S}_+, g \leq f \right\}.$$

Notiamo che l'integrale di una funzione misurabile positiva è ben definito, ma può essere $+\infty$. Inoltre, si vede facilmente che se $f \in \mathcal{S}_+$ il suo integrale coincide con quello già definito.

In generale, se f è misurabile (e di segno qualunque), consideriamo la parte positiva f^+ e la parte negativa f^- di f , il cui integrale è definito nella Definizione 5.2.6. Se f^+ ed f^- hanno integrale finito poniamo

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f^+(x) dx - \int_{\mathbb{R}^n} f^-(x) dx.$$

Diremo che f è *sommabile* in \mathbb{R}^n se è misurabile e la parte positiva e la parte negativa hanno entrambe integrale finito. Tutte le funzioni limitate, misurabili, nulle fuori di un limitato sono sommabili.

Dato un insieme misurabile $E \subset \mathbb{R}^n$ e $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ misurabile diremo che f è *sommabile in E* se $f\chi_E$ è sommabile in \mathbb{R}^n . In tal caso porremo

$$\int_E f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f\chi_E(x) dx.$$

In pratica si integra la funzione che vale $f(x)$ su E e 0 sul complementare di E .

L'insieme delle funzioni sommabili in E verrà indicato con $L^1(E)$.

Teorema 5.2.7 *Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ misurabile. L'insieme delle funzioni sommabili in E è uno spazio vettoriale. Inoltre, per f, g sommabili valgono le proprietà*

(i) (*Linearità*)

$$\int_E [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int_E f(x) dx + \beta \int_E g(x) dx \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

(ii) (*Monotonia*)

$$f \geq g \quad \implies \quad \int_E f(x) dx \geq \int_E g(x) dx$$

(iii) (*Indipendenza da insiemi di misura nulla*) Se $f \in L^1(E)$ e $m_n(\{x \in E : f(x) \neq g(x)\}) = 0$ allora

$$g \in L^1(E) \quad e \quad \int_E f(x) dx = \int_E g(x) dx.$$

(iv) Se f è misurabile, f è sommabile se e solo se $|f|$ è sommabile.

Una conseguenza della linearità dell'integrale è la disuguaglianza tra il modulo dell'integrale e l'integrale del modulo:

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx.$$

Infatti, indicando con $f^+ = f \vee 0$ e $f^- = (-f) \vee 0$ la parte positiva e negativa di f , si ha

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} f^+(x) dx - \int_{\mathbb{R}^n} f^-(x) dx \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} f^+(x) dx + \int_{\mathbb{R}^n} f^-(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx. \end{aligned}$$

Il seguente risultato sarà utile per “scomporre” il calcolo dell’integrale su un insieme nella somma di integrali su insiemi dalla geometria più semplice (vedi il Paragrafo 5.5).

Teorema 5.2.8 (Proprietà di additività dell’integrale) *Se l’insieme E è l’unione di un numero finito di insiemi misurabili E_h ($h = 1, \dots, N$) a parti interne a due a due disgiunte e la funzione $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ è integrabile in E , allora*

$$\int_E f dx = \sum_{h=1}^N \int_{E_h} f dx.$$

Osserviamo che, com’è naturale aspettarsi, se una funzione è integrabile nel senso di Riemann allora è integrabile anche nel senso di Lebesgue e i due integrali hanno lo stesso valore. Questa proprietà non vale se si considerano gli integrali generalizzati visti nel corso di Analisi Matematica I. Infatti la funzione $\frac{\sin x}{x}$ è integrabile in senso improprio ma non è sommabile secondo Lebesgue: infatti, per la (iv) del Teorema precedente, se fosse sommabile l’integrale convergerebbe anche assolutamente, mentre ciò non accade.

5.3 Spazi $L^p(E)$

Esponiamo ora alcuni elementi della teoria degli spazi $L^p(E)$.

Ricordiamo che se V è uno spazio vettoriale su \mathbb{K} (con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oppure $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), una funzione $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ si dice norma su V se verifica le seguenti proprietà, per ogni $u, v \in V$ e $\lambda \in \mathbb{K}$,

1. $\|u\| \geq 0$, $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$,
2. $\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$,
3. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

In questo caso la coppia $(V, \|\cdot\|)$ viene denominata spazio normato su \mathbb{K} . Dalla norma si può sempre dedurre una distanza, cioè una funzione $d : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ verificante le seguenti proprietà, per ogni $u, v, z \in V$,

1. $d(u, v) \geq 0$, $d(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v$,
2. $d(u, v) = d(v, u)$,

$$3. d(u, z) \leq d(u, v) + d(v, z).$$

Nel caso degli spazi normati basta infatti porre, per ogni $u, v \in V$, $d(u, v) := \|u - v\|$. Tale distanza viene denominata distanza dedotta dalla norma $\|\cdot\|$ e la coppia (V, d) diventa uno spazio metrico. Negli spazi metrici viene definita in modo naturale la convergenza di successioni. Infatti, una successione $(u_h)_{h \in \mathbb{N}}$ di elementi di V è convergente verso $u \in V$ se

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} u_h = u \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \nu \in \mathbb{N} : \forall h \geq \nu : d(u_h, u) < \varepsilon.$$

Inoltre, si dice che la successione $(u_h)_{h \in \mathbb{N}}$ verifica la condizione di Cauchy se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \nu \in \mathbb{N} : \forall h, k \geq \nu : d(u_h, u_k) < \varepsilon.$$

Ovviamente, ogni successione convergente verifica la condizione di Cauchy, mentre il viceversa non vale in generale. Uno spazio metrico (V, d) si dice *completo* se ogni successione di Cauchy è convergente. Uno spazio normato $(V, \|\cdot\|)$ si dice *spazio di Banach* se è uno spazio metrico completo munito della distanza dedotta dalla norma.

In tutto il seguito verranno identificate le funzioni che sono quasi ovunque uguali. Inoltre considereremo funzioni a valori reali ma si potrebbero facilmente considerare funzioni a valori complessi. Siano E un sottoinsieme misurabile di \mathbb{R}^n e $1 \leq p < +\infty$. Lo spazio $L^p(E)$ viene definito come segue

$$L^p(E) := \{ u : E \rightarrow \mathbb{R} ; |u|^p \text{ è sommabile} \}.$$

Lo spazio vettoriale (reale se si considerano solamente funzioni a valori reali, altrimenti complesso) $L^p(E)$ è munito della seguente norma, per ogni $u \in L^p(E)$

$$\|u\|_{L^p} := \left(\int_E |u|^p dx \right)^{1/p}.$$

Ricordiamo che una funzione $u : E \rightarrow \mathbb{R}$ si dice *essenzialmente limitata* se $\|u\|_\infty < \infty$, cioè se esiste un sottoinsieme $N \subset E$ di misura nulla tale che u è limitata in $E \setminus N$ (quindi, u è limitata quasi ovunque). In definitiva, le funzioni essenzialmente limitate sono quelle che coincidono quasi ovunque con una funzione limitata. Lo spazio vettoriale di tutte le funzioni essenzialmente limitate su E viene denotato con $L^\infty(E)$. Lo spazio $(L^\infty(E), \|\cdot\|_{L^\infty})$ è uno spazio normato.

Seguono ora alcune proprietà essenziali degli spazi $(L^p(E), \|\cdot\|_{L^p})$ con $1 \leq p \leq +\infty$. Se $1 < p < +\infty$, si definisce coniugato di p , il numero reale p' che verifica la condizione

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Ovviamente $1 < p' < +\infty$ e $p' = p/(p-1)$. Inoltre, anche 1 e $+\infty$ si dicono coniugati.

Si osservi che l'unico numero coniugato con sé stesso è 2. Enunciamo un teorema che ci permette di stimare il prodotto di due funzioni.

Teorema 5.3.1 (Diseguaglianza di Hölder) *Siano $1 \leq p, p' \leq +\infty$ coniugati e $u \in L^p(E)$, $v \in L^{p'}(E)$. Allora $u \cdot v \in L^1(E)$ e inoltre*

$$\int_E |u v| dx \leq \|u\|_{L^p} \|v\|_{L^{p'}}.$$

Osservazione 5.3.2 Notiamo che dal Teorema precedente si ottiene che, se E ha misura finita e $r < s$ allora $L^s(E) \subset L^r(E)$. Infatti se $f \in L^s(E)$ scegliamo $u = f^r$, $v = 1$ e $p = s/r$. Allora risulta che $u \in L^p(E)$, $v \in L^{p'}(E)$ e

$$\begin{aligned} \int_E |f|^r \cdot |v| dx &\leq \left(\int_E |u|^p dx \right)^{1/p} \left(\int_E |v|^{p'} dx \right)^{1/p'} \\ &= \|f\|_{L^s}^r m(E)^{1-r/s} \end{aligned}$$

da cui

$$\|f\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^s} (m(E))^{\frac{1}{r} - \frac{1}{s}}.$$

In generale nulla si può dire se E ha misura infinita. La funzione $\frac{x}{1+x^2}$ appartiene a $L^2(\mathbb{R})$ ma non a $L^1(\mathbb{R})$. La funzione $\frac{1}{(1+x^2)\sqrt{|x|}}$ appartiene a $L^1(\mathbb{R})$ ma non a $L^2(\mathbb{R})$.

La proprietà seguente in realtà è stata già utilizzata affermando che $(L^p(E), \|\cdot\|_{L^p})$ è uno spazio normato, in quanto esprime proprio la terza proprietà della norma.

Teorema 5.3.3 (Diseguaglianza di Minkowski) *Siano $1 \leq p \leq +\infty$ e $u, v \in L^p(E)$. Allora $(u+v) \in L^p(E)$ e*

$$\|u+v\|_{L^p} \leq \|u\|_{L^p} + \|v\|_{L^p}.$$

La distanza dedotta dalla norma $\|\cdot\|_{L^p}$ viene denotata con d_p , quindi, per ogni $u, v \in L^p(E)$, $d_p(u, v) := \|u - v\|_{L^p}$. Pertanto, se $1 \leq p < +\infty$ una successione $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ di elementi di $L^p(E)$ converge verso $u \in L^p(E)$ se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \nu \in \mathbb{N} : \forall k \geq \nu : \int_E |u_k(x) - u(x)|^p dx < \varepsilon,$$

ossia

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} \int_E |u_k(x) - u(x)|^p dx = 0.$$

Se $p = +\infty$, la condizione precedente diventa

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \nu \in \mathbb{N} : \forall k \geq \nu : \sup \text{ess} |u_k - u| < \varepsilon.$$

La stessa successione verifica la condizione di Cauchy se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \nu \in \mathbb{N} : \forall k, h \geq \nu : \int_E |u_k(x) - u_h(x)|^p dx < \varepsilon,$$

per $1 \leq p < +\infty$, mentre

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \nu \in \mathbb{N} : \forall k, h \geq \nu : \sup \operatorname{ess} |u_k - u_h| < \varepsilon,$$

se $p = +\infty$. Una proprietà importante relativa alla convergenza negli spazi $L^p(E)$ è data dal seguente risultato.

Teorema 5.3.4 *Per ogni $1 \leq p \leq +\infty$, $(L^p(E), \|\cdot\|_{L^p})$ è uno spazio di Banach.*

Pertanto, ogni successione di Cauchy in $L^p(E)$ risulta convergente in norma L^p .

Osserviamo infine che la convergenza nella norma L^p non implica quella quasi ovunque, ma esiste una sottosuccessione che converge q.o. in E .

Esempi 5.3.5

1. Sia $\alpha > 0$ e si consideri la funzione $u : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo, per ogni $x \in]0, 1]$,

$$u(x) := \frac{1}{x^\alpha},$$

(si osservi che è sufficiente definire le funzioni in L^p a meno di un insieme di misura nulla, in quanto le funzioni che differiscono in insiemi di misura nulla vengono identificate). Ovviamente, risulta

$$\int_0^1 \left| \frac{1}{x^\alpha} \right|^p dx < +\infty$$

se e solo se $\alpha p < 1$ e quindi $u \in L^p([0, 1])$ se $\alpha < 1/p$, mentre $u \notin L^p([0, 1])$ se $\alpha \geq 1/p$. Se $p = +\infty$, si verifica direttamente che $u \notin L^\infty([0, 1])$ in quanto u non è essenzialmente limitata.

2. Sia $\alpha > 0$ e si consideri, per ogni $k \geq 1$, la funzione

$$u_k(x) := k^\alpha \chi_{[0, 1/k]}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Allora risulta ovviamente $u_k \in L^p(\mathbb{R})$ per ogni $1 \leq p \leq +\infty$ ed inoltre, se $1 \leq p < +\infty$,

$$\|u_k\|_{L^p}^p = \int_0^{1/k} k^{\alpha p} dx = \frac{k^{\alpha p}}{k} = k^{\alpha p - 1},$$

mentre

$$\|u_k\|_{L^\infty} = k^\alpha.$$

Pertanto, la successione $(u_k)_{k \geq 1}$ non è convergente in norma L^∞ mentre, se $1 \leq p < +\infty$, la successione $(u_k)_{k \geq 1}$ converge alla funzione nulla nella norma L^p se e solo se $\alpha p - 1 < 0$, cioè se $p < 1/\alpha$.

5.4 Spazi di Hilbert e prodotto scalare in $L^2(E)$

La teoria di cui presentiamo i primi elementi è stata sviluppata dal matematico tedesco David Hilbert (1862-1943) ed ha avuto un ruolo molto importante nella formulazione della Meccanica Quantistica.

Sia H uno spazio vettoriale su \mathbb{K} , dove $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oppure $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Si dice che una funzione $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{K}$ è un *prodotto scalare* su H se verifica le seguenti condizioni:

1. Per ogni $x \in H$: $\langle x, x \rangle \geq 0$ e inoltre $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$,
2. Per ogni $x, y \in H$: $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$,
3. Per ogni $x, y, z \in H$: $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$,
4. Per ogni $x \in H$ e $\lambda \in \mathbb{K}$: $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$.

Assegnato un prodotto scalare, si può definire una norma su H ponendo, per ogni $x \in H$,

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Si verifica facilmente che $\|\cdot\|$ è una norma su H , denominata norma dedotta dal prodotto scalare. Si dice che $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ è uno *spazio di Hilbert* se lo spazio normato $(H, \|\cdot\|)$ munito della norma dedotta dal prodotto scalare è uno spazio di Banach.

Assegnato uno spazio normato $(V, \|\cdot\|)$, ci si può chiedere se esiste un prodotto scalare su V tale che la norma da esso dedotta coincida con quella originaria di V . La risposta a tale domanda è affermativa se e solo se la norma di V verifica la seguente *regola del parallelogramma*

$$\forall x, y \in V : \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Nel caso degli spazi $L^p(E)$, con E sottoinsieme misurabile di \mathbb{R}^n , si può riconoscere che la regola del parallelogramma è valida se e solo se $p = 2$. Pertanto $L^2(E)$, usando il Teorema 5.3.1, può essere munito di un prodotto scalare per cui risulta uno spazio di Hilbert. Il prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle : L^2(E) \times L^2(E) \rightarrow \mathbb{C}$ è definito ponendo, per ogni $u, v \in L^2(E)$,

$$\langle u, v \rangle := \int_E u(x) \overline{v(x)} dx.$$

Per ogni $1 \leq p < +\infty$, si può considerare lo spazio ℓ^p delle successioni p -sommabili definito come segue

$$\ell^p := \left\{ (a_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|^p < +\infty \right\}.$$

Si pone inoltre

$$\ell^\infty := \left\{ (a_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \sup_{k \in \mathbb{N}} |a_k| < +\infty \right\}.$$

Si riconosce facilmente che ℓ^p è uno spazio di Banach munito della norma

$$\|(a_k)_{k \in \mathbb{N}}\|_{\ell^p} := \left(\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|^p \right)^{1/p} \quad \text{se } 1 \leq p < +\infty, \quad \|(a_k)_{k \in \mathbb{N}}\|_{\ell^\infty} := \sup_{k \in \mathbb{N}} |a_k|.$$

Anche in questo caso la norma $\|\cdot\|_{\ell^p}$ deriva da un prodotto scalare solamente nel caso $p = 2$, in ℓ^2 il prodotto scalare è definito nel modo seguente:

$$\langle (a_k)_{k \in \mathbb{N}}, (b_k)_{k \in \mathbb{N}} \rangle := \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \cdot \overline{b_k}.$$

Lo spazio $(\ell^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ risulta essere uno spazio di Hilbert. Oltre agli esempi di spazi di Hilbert considerati, conviene tenere presente che anche \mathbb{K}^n è uno spazio di Hilbert munito del prodotto scalare

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=0}^n x_k \cdot \overline{y_k},$$

per ogni $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ e $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$. Il prodotto scalare $\langle x, y \rangle$ in \mathbb{K}^n viene spesso brevemente denotato con $x \cdot y$ e la norma da esso dedotta semplicemente con $|\cdot|$.

Si consideri ora un arbitrario spazio di Hilbert $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Si dice che una successione $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ di elementi di H è una *base hilbertiana* di $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ se verifica le seguenti proprietà:

1. $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ è un *sistema ortonormale*, cioè, per ogni $h, k \in \mathbb{N}$,

$$\langle u_h, u_k \rangle = \delta_{hk} = \begin{cases} 1 & \text{se } h = k, \\ 0 & \text{se } h \neq k. \end{cases}$$

2. $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ è un *sistema di generatori di H* , cioè per ogni $u \in H$, esiste una successione $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ di elementi di \mathbb{K} tale che

$$u = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k u_k. \quad (5.4.5)$$

Se $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ è una base hilbertiana di $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, per ogni $u \in H$, la successione $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ di elementi di \mathbb{K} verificante la (5.4.5) è unica ed è data da

$$a_k = \langle u, u_k \rangle, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Pertanto

$$u = \sum_{k=0}^{+\infty} \langle u, u_k \rangle u_k.$$

Valgono inoltre la seguente *uguaglianza di Bessel*

$$\|u\|^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|^2$$

e l'*uguaglianza di Parseval*

$$\langle u, v \rangle = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \overline{b_k}, \quad a_k = \langle u, u_k \rangle, \quad b_k = \langle v, u_k \rangle.$$

Nello spazio di Hilbert $(L^2([0, 2\pi]), \langle \cdot, \cdot \rangle)$, una base hilbertiana è costituita dalla successione $(u_k)_{k \in \mathbb{Z}}$, dove per ogni $k \in \mathbb{Z}$, la funzione $u_k : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ è definita ponendo, per ogni $t \in [0, 2\pi]$, $u_k(t) := \frac{e^{ikt}}{\sqrt{2\pi}}$.

5.5 Calcolo degli integrali multipli

In questo paragrafo affrontiamo il problema del calcolo effettivo degli integrali. Nel caso di una variabile, almeno nel caso di funzioni continue o generalmente continue, si esegue come visto nel caso dell'integrale di Riemann. Nel caso di funzioni di più variabili, l'idea è di ricondursi al calcolo successivo di integrali in una sola variabile. Gli strumenti fondamentali sono la formula di riduzione e il teorema sul cambiamento di variabili.

5.5.a Formule di riduzione ed insiemi normali

Iniziamo a discutere la *formula di riduzione* (nota anche come *teorema di Fubini-Tonelli*).

Teorema 5.5.1 (Formula di riduzione) *Siano $p, k \geq 1$ interi, $n = p + k$ e scriviamo $x = (y, z)$ con $y \in \mathbb{R}^p$ e $z \in \mathbb{R}^k$. Data $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sommabile, per m_p -quasi ogni $y \in \mathbb{R}^p$ la funzione $z \mapsto f(y, z)$ è sommabile in \mathbb{R}^k e*

$$y \mapsto \int_{\mathbb{R}^k} f(y, z) dz$$

è sommabile in \mathbb{R}^p . Si ha inoltre

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^k} f(y, z) dz \right) dy.$$

Analogamente, per m_k -quasi ogni $z \in \mathbb{R}^k$ la funzione $y \mapsto f(y, z)$ è sommabile in \mathbb{R}^p e

$$z \mapsto \int_{\mathbb{R}^p} f(y, z) dy$$

è sommabile in \mathbb{R}^k . Si ha inoltre

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^k} \left(\int_{\mathbb{R}^p} f(y, z) dy \right) dz.$$

Notiamo che in particolare si ha

$$\int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^k} f(y, z) dz \right) dy = \int_{\mathbb{R}^k} \left(\int_{\mathbb{R}^p} f(y, z) dy \right) dz.$$

L'uguaglianza sopra è detta *formula di inversione dell'ordine di integrazione*. Dato $E \subset \mathbb{R}^n$ misurabile, applicando la formula di riduzione alla funzione $f = \chi_E$ otteniamo che gli insiemi

$$E_y = \{z \in \mathbb{R}^k : (y, z) \in E\} \quad \left(E_z = \{y \in \mathbb{R}^p : (y, z) \in E\} \right)$$

sono misurabili in \mathbb{R}^k (\mathbb{R}^p) per m_p -quasi ogni $y \in \mathbb{R}^p$ (m_k -quasi ogni $z \in \mathbb{R}^k$) e

$$\int_{\mathbb{R}^p} m_k(E_y) dy = m_n(E) \quad \left(\int_{\mathbb{R}^k} m_p(E_z) dz = m_n(E) \right).$$

Nel caso dell'integrale su un insieme $E \subset \mathbb{R}^n$, applicando il teorema precedente alla funzione $f\chi_E$ troviamo

$$\int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{E_y} f(y, z) dz \right) dy = \int_E f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^k} \left(\int_{E_z} f(y, z) dy \right) dz.$$

Infine, vediamo una relazione notevole tra l'integrale di una funzione misurabile $f \geq 0$ e la misura $(n+1)$ -dimensionale del sottografico di f :

$$S_f = \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : 0 \leq t \leq f(x)\}.$$

Teorema 5.5.2 (Teorema del sottografico) *Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty)$ misurabile. Allora l'insieme S_f è misurabile in \mathbb{R}^{n+1} e*

$$m_{n+1}(S_f) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx.$$

DIM. Non dimostreremo la misurabilità di S_f . Usando la formula di riduzione verifichiamo l'uguaglianza sopra:

$$m_{n+1}(S_f) = \int_{\mathbb{R}^n} m_1((S_f)_x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx$$

dato che $(S_f)_x = [0, f(x)]$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$.

QED

Per funzioni di segno qualunque si ha

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} f^+(x) dx - \int_{\mathbb{R}^n} f^-(x) dx \\
 &= m_{n+1}(S_{f+}) - m_{n+1}(S_{f-}) \\
 &= m_{n+1}(\{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : 0 \leq t \leq f(x)\}) \\
 &\quad - m_{n+1}(\{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : f(x) \leq t \leq 0\}).
 \end{aligned}$$

purché la parte positiva o la parte negativa di f abbiano integrale finito.

Negli esempi seguenti discutiamo in dettaglio i casi di integrali doppi e tripli, che sono i più frequenti nelle applicazioni. Iniziamo con la descrizione degli insiemi su cui la formula di riduzione fornisce in modo diretto il risultato.

Esempio 5.5.3 (Insiemi normali del piano) Si dice *insieme normale rispetto all'asse x* un insieme chiuso e limitato del tipo

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \in [a, b], \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\} \quad (5.5.6)$$

dove $\alpha, \beta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sono funzioni continue con $\alpha(x) \leq \beta(x)$ per ogni $x \in [a, b]$. Sia $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione sommabile in E . Allora per il Teorema 5.5.1 risulta

$$\iint_E f dx dy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

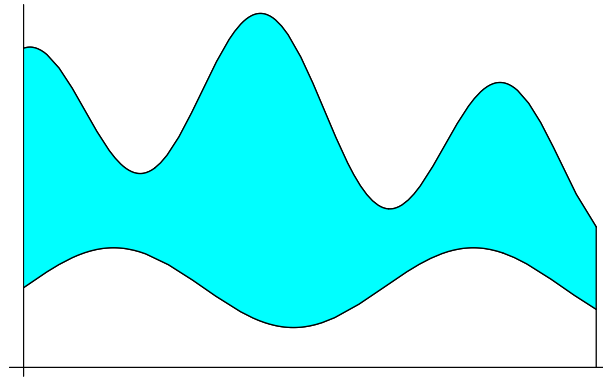


Figura – 5.1: Un insieme normale rispetto all'asse x .

Osservazioni 5.5.4

1. Per brevità si usano spesso le notazioni

$$\iint_E f dx dy = \int_a^b dx \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy = \int_a^b \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy dx.$$

2. La formula di riduzione ci permette di mostrare che ogni insieme normale è misurabile e la sua misura coincide con l'area definita usando gli integrali in una variabile. Infatti, se E è un insieme normale come nella Definizione 5.5.3, si ha

$$m(E) = \int_{\mathbb{R}^2} \chi_E dx dy = \int_E dx dy = \int_a^b (\beta(x) - \alpha(x)) dx.$$

3. Ovviamente, si può dare in modo naturale la nozione di insieme normale rispetto all'asse y , e può naturalmente accadere che un insieme sia normale rispetto ad entrambi gli assi (basta pensare ad un cerchio), e vale l'analoga formula di riduzione. In tal caso, si hanno due modi di calcolare l'integrale dato, e la scelta dipende più che altro dalla facilità dei calcoli. Utilizzando il Teorema 5.2.8, può essere opportuno decomporre E in insiemi E_h alcuni dei quali normali rispetto all'asse x ed altri rispetto all'asse y .

Esaminiamo ora in dettaglio il caso $n = 3$.

Esempio 5.5.5 (Insiemi normali dello spazio) Nel caso delle funzioni di tre variabili abbiamo una definizione di insieme normale analoga alla (5.5.6). Si dice insieme normale rispetto al piano $z = 0$ un insieme del tipo

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x, y) \in E, \phi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)\} \quad (5.5.7)$$

dove $\phi, \psi : E \rightarrow \mathbb{R}$ sono funzioni continue con $\phi(x, y) \leq \psi(x, y)$ per ogni $(x, y) \in E$ ed E è un insieme piano normale. La formula di riduzione per gli integrali tripli riduce il calcolo di un integrale triplo al calcolo di un integrale semplice e un integrale doppio.

Sia $G \subset \mathbb{R}^3$ un insieme misurabile normale come in (5.5.7) e sia $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione sommabile in G . Allora

$$\iiint_G f dx dy dz = \iint_E \left(\int_{\phi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy.$$

È chiaro che per il calcolo dell'integrale doppio si usa la formula di riduzione vista in precedenza. Questo metodo di integrazione è detto anche “per fili”.

Può essere utile talvolta procedere in maniera diversa, trasformando un integrale triplo in un integrale doppio e un integrale semplice. Questo secondo metodo di integrazione è detto anche “per strati”. Esso si utilizza quando l'insieme G è del seguente tipo

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z \in [a, b], (x, y) \in G_z\} \quad (5.5.8)$$

dove i G_z sono insiemi piani normali. In tal caso il teorema di riduzione diventa:

Sia G un insieme chiuso misurabile del tipo (5.5.8), e sia $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione sommabile in G . Se la funzione

$$z \mapsto \iint_{G_z} f(x, y, z) dx dy$$

è sommabile in $[a, b]$, allora si ha

$$\iiint_G f \, dx dy dz = \int_a^b \left(\iint_{G_z} f(x, y, z) \, dx dy \right) dz.$$

Questa formula è particolarmente utile quando l'insieme G è un insieme di rotazione intorno all'asse z , nel qual caso i G_z sono cerchi. Se G è l'insieme di rotazione intorno all'asse z generato da una funzione $g : [a, b] \rightarrow (0, +\infty)$ continua allora risulta

$$m(G) = \pi \int_a^b (g(z))^2 dz.$$

5.5.b Cambiamento di variabili negli integrali multipli

Negli integrali multipli, a volte è conveniente semplificare i calcoli usando sistemi di coordinate diversi da quelle cartesiane. Ciò capita soprattutto quando il dominio di integrazione e/o la funzione integranda presentano simmetrie. Il risultato che vedremo è analogo al metodo di sostituzione negli integrali semplici, ma risulta essere tecnicamente più complicato a causa della geometria dei domini, che nel caso $n = 1$ sono semplici intervalli.

Teorema 5.5.6 *Siano $D, E \subset \mathbb{R}^n$ misurabili e $\Phi : D \rightarrow E$ bigettiva. Supponiamo che Φ sia di classe C^1 in un insieme aperto contenente D . Data $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ si ha che f è sommabile in E se e solo se*

$$f(\Phi(x)) |\det J\Phi(x)|$$

è sommabile in D e vale l'uguaglianza

$$\int_D f(\Phi(x)) |\det J\Phi(x)| \, dx = \int_E f(y) \, dy. \quad (5.5.9)$$

Nel caso particolare $f = \chi_E$ si ha

$$m_n(E) = m_n(\Phi(D)) = \int_D |\det J\Phi(x)| \, dx.$$

Intuitivamente, la comparsa del determinante di $J\Phi$ nel passaggio da un integrale all'altro tiene conto di come l'applicazione Φ “dilata” o “contrae” gli insiemi. Consideriamo ad esempio $E = B_1((-2, 0)) \cup B_1((2, 0)) \subset \mathbb{R}^2$, $D = B_{1/2}((-2, 0)) \cup B_2((2, 0))$ e una funzione Φ tale che $J\Phi = 2Id$ su $B_{1/2}((-2, 0))$ e $J\Phi = Id/2$ su $B_2((2, 0))$. Allora

$$\begin{aligned} m_2(E) &= \pi + \pi = 4m_2(B_{1/2}((-2, 0))) + \frac{1}{4}m_2(B_2((2, 0))) \\ &= \int_D |\det J\Phi| \, dx. \end{aligned}$$

Si può verificare direttamente che la formula di cambiamento di variabili vale per funzioni lineari Φ ; nel caso generale, dividendo un insieme D in parti molto piccole sulle quali Φ è prossimo ad una funzione lineare (data dal differenziale di Φ) ed usando l'additività della misura si perviene alla formula nel caso generale.

Non dimostreremo la formula di cambiamento di variabili ma la verificheremo in due casi particolari:

1. Supponiamo $n = 1$, $D = [a, b]$, $E = [c, d]$, Φ di classe C^1 in D e monotona, f continua in E . Dalla formula di cambiamento di variabili vista ad Analisi I otteniamo

$$\int_a^b f(\Phi(x))\Phi'(x) dx = \int_{\Phi(a)}^{\Phi(b)} f(y) dy. \quad (5.5.10)$$

Se $\Phi' \geq 0$ allora Φ è crescente e $\Phi(a) = c$, $\Phi(b) = d$; si ottiene quindi

$$\int_{[a,b]} f(\Phi(x))|\Phi'(x)| dx = \int_{[c,d]} f(y) dy. \quad (5.5.11)$$

Se invece $\Phi' \leq 0$ in $[a, b]$ allora $\Phi(a) = d$ e $\Phi(b) = c$; cambiando i segni ad ambo i membri nella (5.5.10) otteniamo di nuovo (5.5.11).

2. Supponiamo che tutte le componenti di Φ tranne una siano l'identità. Per fissare le idee poniamo $x = (z, y)$ con $z \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}^{n-1}$ e supponiamo che

$$\Phi(x) = \Phi(z, y) = (\varphi(z, y), y_1, \dots, y_{n-1}). \quad (5.5.12)$$

Si ha allora $\det J\Phi = \partial\varphi/\partial z(z, y) = \varphi'_y(z)$, ove $\varphi_y(z) = \varphi(z, y)$. Posto

$$D_y = \{z \in \mathbb{R} : (z, y) \in D\} \quad E_y = \{z \in \mathbb{R} : (z, y) \in E\}.$$

abbiamo anche

$$E_y = \{\varphi(z, y) : (z, y) \in D\} = \varphi_y(D_y).$$

Usando allora la formula di riduzione e le relazioni scritte sopra otteniamo

$$\begin{aligned} \int_E f(z, y) dz dy &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{E_y} f(z, y) dz \right) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{D_y} f(\varphi_y(z), y) |\varphi'_y(z)| dz \right) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{D_y} f(\Phi(y, z)) |\det J\Phi(y, z)| dz \right) dy \\ &= \int_D f(\Phi(z, y)) |\det J\Phi(z, y)| dz dy. \end{aligned}$$

Per ottenere la dimostrazione generale, si può iniziare provando che localmente ogni applicazione Φ avente matrice jacobiana non singolare è composizione di applicazioni Φ_1, \dots, Φ_n del tipo considerato in (5.5.12), quindi la (5.5.9) può essere dedotta, almeno localmente, usando n volte l'argomento nel punto 2. Si passa poi alla formula globale usando l'additività della misura. La formula di cambiamento di variabili è così ricondotta a quella di una variabile.

Tra i vari cambiamenti di variabili ricordiamo le *coordinate polari* in \mathbb{R}^2 :

$$\Phi(\varrho, \theta) = (\varrho \cos \theta, \varrho \sin \theta) \quad \varrho > 0, \quad 0 \leq \theta < 2\pi$$

con $|\det J\Phi(\varrho, \theta)| = \varrho$, le *coordinate cilindriche* in \mathbb{R}^3 :

$$\Phi(\varrho, \theta, z) = (\varrho \cos \theta, \varrho \sin \theta, z) \quad \varrho > 0, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad z \in \mathbb{R}$$

con $|\det J\Phi(\varrho, \theta, z)| = \varrho$ e le *coordinate sferiche* in \mathbb{R}^3 :

$$\begin{aligned} \Phi(\varrho, \theta, \phi) &= (\varrho \cos \theta \sin \phi, \varrho \sin \theta \sin \phi, \varrho \cos \phi) \\ \varrho &> 0, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad 0 < \phi < \pi \end{aligned}$$

con $|\det J\Phi(\varrho, \theta, \phi)| = \varrho^2 \sin \phi$.

Più in generale, si possono definire *coordinate sferiche in \mathbb{R}^n* , usando una variabile lineare $\varrho = \|x\|$ come in \mathbb{R}^3 ed $n-1$ variabili angolari $\omega_1, \dots, \omega_{n-1}$, vedi Esempio 5.5.10.

Esempi 5.5.7

1. Vogliamo calcolare

$$\iint_G x \, dx \, dy$$

dove $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 2x \leq 0\}$. Utilizzando le coordinate polari, per cui il determinante della matrice jacobiana vale ϱ , si determina l'insieme E effettuando la sostituzione nelle disuguaglianze. In questo caso si ottiene $\varrho^2 - 2\varrho \cos \vartheta \leq 0$ e quindi

$$E = F^{-1}(G) = \{(\varrho, \vartheta) : -\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \varrho \leq 2 \cos \vartheta\}.$$

(Osserviamo che si deve avere $\cos \vartheta \geq 0$, per questo abbiamo $\vartheta \in [-\pi/2, \pi/2]$).

Dunque avremo

$$\begin{aligned}
 \iint_G x \, dx dy &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\vartheta \int_0^{2\cos\vartheta} \varrho \cos\vartheta \, \varrho \, d\varrho = \frac{8}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4\vartheta \, d\vartheta \\
 &= \frac{8}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\vartheta (1 - \sin^2\vartheta) \, d\vartheta = \frac{8}{3} \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\vartheta \, d\vartheta - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\vartheta \sin^2\vartheta \, d\vartheta \right) \\
 &= \frac{8}{3} \left(\left[\frac{\vartheta + \sin\vartheta \cos\vartheta}{2} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} - \frac{1}{4} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2(2\vartheta) \, d\vartheta \right) \\
 &= \frac{8}{3} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{8} \left[\frac{2\vartheta - \sin(2\vartheta) \cos(2\vartheta)}{2} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \right) = \frac{8}{3} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} \right) = \pi.
 \end{aligned}$$

2. **Baricentro e momento d'inerzia.** Sia $E \subset \mathbb{R}^3$ e sia $\varrho(x, y, z)$ la sua densità di massa. Allora la massa di E è data da $m = \iiint_E \varrho \, dx dy dz$. Le coordinate del *baricentro* di E sono date da

$$x_E = \frac{1}{m} \iiint_E x \varrho \, dx dy dz, \quad y_E = \frac{1}{m} \iiint_E y \varrho \, dx dy dz, \quad z_E = \frac{1}{m} \iiint_E z \varrho \, dx dy dz.$$

Il *momento d'inerzia rispetto all'origine* di E è dato da

$$I_O = \iiint_E (x^2 + y^2 + z^2) \varrho \, dx dy dz,$$

mentre il *momento d'inerzia rispetto a un asse* (per esempio l'asse z) è dato da

$$I_z = \iiint_E (x^2 + y^2) \varrho \, dx dy dz.$$

Analoghe definizioni valgono nel caso $E \subset \mathbb{R}^2$.

5.5.c Integrali per funzioni e insiemi illimitati

Consideriamo ora il caso di funzioni non limitate o domini di integrazione non limitati. Nel caso dell'integrale di Riemann per funzioni di una variabile, l'integrale improprio era definito passando al limite su opportuni sottointervalli dell'intervallo di integrazione. Nel caso generale (integrale di Lebesgue in dimensione qualunque) l'integrale è già stato definito, ma non abbiamo ancora strumenti effettivi per il calcolo, dal momento che le formule di riduzione sono state discusse per domini limitati. Per mostrare come si possa combinare il calcolo su domini limitati e l'idea dell'integrale improprio allo scopo di calcolare integrali per funzioni e/o domini illimitati, iniziamo con la seguente definizione.

Definizione 5.5.8 (Insiemi invadenti) Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ un insieme misurabile e sia (E_h) una successione di sottoinsiemi misurabili. Diciamo che E_h è una successione di insiemi invadenti per E se $E_h \subset E_{h+1}$ per ogni $h \in \mathbb{N}$ e $m_n \left(E \setminus \bigcup_{h=0}^{\infty} E_h \right) = 0$.

Utilizzando le successioni di insiemi invadenti possiamo eseguire il calcolo di integrali anche per funzioni e/o domini illimitati.

Sia E un insieme misurabile e sia (E_h) una successione di insiemi invadenti per E . Sia $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione misurabile su E . Allora, per la proprietà (5.1.2) della misura, f è sommabile in E se e solo se

$$\sup_{h \in \mathbb{N}} \int_{E_h} |f(x)| dx < +\infty.$$

In questo caso esiste finito il $\lim_{h \rightarrow +\infty} \int_{E_h} f(x) dx$ e risulta

$$\int_E f(x) dx = \lim_{h \rightarrow +\infty} \int_{E_h} f(x) dx.$$

Osserviamo che il calcolo dell'integrale non dipende dalla scelta della successione $(E_h)_h$ di insiemi invadenti. La tecnica degli insiemi invadenti può ovviamente essere usata anche per stabilire se una funzione misurabile è sommabile o no in un insieme. Questo dipende da quanto rapidamente tende all'infinito la funzione, e da quanto è "grande" l'insieme su cui tende all'infinito. Negli esempi seguenti vediamo il caso delle funzioni radiali ed i criteri di sommabilità che se ne deducono.

Esempio 5.5.9 Sia $E = \bar{B}_1(0,0) \setminus \{(0,0)\} \subset \mathbb{R}^2$ e sia $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Evidentemente, la funzione f è illimitata su E . Scegliamo $E_h = \bar{B}_1(0,0) \setminus B_{1/h}(0,0)$. La funzione f è integrabile su E_h perché è ivi continua e limitata e risulta

$$\iint_{E_h} f(x,y) dx dy = \int_0^{2\pi} \int_{1/h}^1 \frac{1}{\varrho} \varrho d\varrho d\vartheta = 2\pi \left(1 - \frac{1}{h} \right).$$

Pertanto

$$\iint_E f(x,y) dx dy = 2\pi.$$

Più in generale, possiamo considerare la funzione $f_\alpha(x,y) = \frac{1}{(\sqrt{x^2+y^2})^\alpha}$, al variare di $\alpha > 0$. Ripetendo il calcolo precedente con ovvie modifiche, si trova che f_α è integrabile in E se e solo se $\alpha < 2$.

Viceversa, ci si può domandare se f_α sia integrabile in $E = \mathbb{R}^2 \setminus B_1(0,0)$. Risulta, per

$E_h = \bar{B}_h(0,0) \setminus B_1(0,0)$ e $\alpha \neq 2$:

$$\iint_{E_h} f_\alpha(x,y) dx dy = \int_0^{2\pi} \int_1^h \frac{1}{\varrho^\alpha} \varrho d\varrho d\vartheta = 2\pi \int_1^h \varrho^{1-\alpha} d\varrho = 2\pi \left(\frac{h^{2-\alpha}}{2-\alpha} - \frac{1}{2-\alpha} \right)$$

per cui

$$\sup_h \iint_{E_h} f_\alpha(x,y) dx dy < +\infty \iff \alpha > 2,$$

e in questo caso risulta

$$\iint_E f_\alpha(x,y) dx dy = \frac{2\pi}{\alpha-2}.$$

Esempio 5.5.10 Oltre che in \mathbb{R}^2 e in \mathbb{R}^3 , si possono definire *coordinate sferiche in \mathbb{R}^n* per ogni valore di n . Non entriamo nei dettagli, ma segnaliamo che questo, generalizzando i casi $n = 2, 3$, si può fare definendo $\varrho = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ e introducendo in modo opportuno $n-1$ angoli, siano $\phi_1, \dots, \phi_{n-1}$. Le formule di passaggio dalle coordinate $(\varrho, \phi_1, \dots, \phi_{n-1})$ alle (x_1, \dots, x_n) saranno del tipo $x_i = \varrho F_i(\phi_1, \dots, \phi_{n-1})$, dove le F_i sono polinomi in $\sin \phi_j, \cos \phi_j$ per $j = 1, \dots, n-1$. Ne segue che il determinante jacobiano risulta della forma $\det(DF(\varrho, \phi_1, \dots, \phi_{n-1})) = \varrho^{n-1} g(\phi_1, \dots, \phi_{n-1})$, con g dello stesso tipo delle F_i . Queste considerazioni ci permettono di generalizzare l'Esempio 5.5.9 come segue, dove come prima $f_\alpha(x) = \frac{1}{\|x\|^\alpha}$:

$$\begin{aligned} f_\alpha \text{ è integrabile in } B_1(0) \setminus \{0\} &\iff \alpha < n \\ f_\alpha \text{ è integrabile in } \mathbb{R}^n \setminus B_1(0) &\iff \alpha > n. \end{aligned}$$

Dall'esempio precedente si ottiene il seguente Teorema di confronto.

Teorema 5.5.11 (Teorema di confronto)

1. Sia $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e sia E un intorno misurabile chiuso e limitato di x_0 . Sia f una funzione continua in $E \setminus \{x_0\}$. Se esistono $0 < \alpha < n$ ed $M > 0$ tali che

$$|f(x)| \leq \frac{M}{\|x - x_0\|^\alpha}, \quad \forall x \in E \setminus \{x_0\},$$

allora f è sommabile in E . Viceversa se esistono $\alpha \geq n$ ed $M > 0$ tali che

$$|f(x)| \geq \frac{M}{\|x - x_0\|^\alpha}, \quad \forall x \in E \setminus \{x_0\},$$

allora f non è sommabile in E .

2. Sia $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e sia E un intorno misurabile aperto e limitato di x_0 . Sia f una funzione continua in $\mathbb{R}^n \setminus E$. Se esistono $\alpha > n$ ed $M > 0$ tali che

$$|f(x)| \leq \frac{M}{\|x - x_0\|^\alpha}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus E,$$

allora f è sommabile in $\mathbb{R}^n \setminus E$. Viceversa se esistono $\alpha \leq n$ ed $M > 0$ tali che

$$|f(x)| \geq \frac{M}{\|x - x_0\|^\alpha}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus E,$$

allora f non è sommabile in $\mathbb{R}^n \setminus E$.

Esempio 5.5.12 (L'integrale della funzione gaussiana)

Mostriamo un'applicazione della formula di cambiamento di variabili e della formula di riduzione per calcolare l'integrale di e^{-x^2} su tutto \mathbb{R} . Non possiamo utilizzare il Teorema fondamentale del Calcolo Integrale perché le primitive di e^{-x^2} non si possono esprimere mediante funzioni elementari. Calcoliamo dapprima l'integrale di $e^{-x^2-y^2}$ su \mathbb{R}^2 . Questa funzione è integrabile in quanto all'infinito è un infinitesimo di ordine arbitrariamente grande. Usando la successione di insiemi invadenti data dai cerchi $B_k(0)$ di raggio $k \in \mathbb{N}$ e le coordinate polari troviamo

$$\iint_{B_k} e^{-x^2-y^2} dx dy = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^k e^{-\varrho^2} \varrho d\varrho = 2\pi \left[-\frac{1}{2} e^{-\varrho^2} \right]_0^k = \pi(1 - e^{-k^2}).$$

Passando al limite per $k \rightarrow \infty$ otteniamo

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy = \pi.$$

Usando ora la successione di insiemi invadenti data dai quadrati $Q_k = [-k, k]^2$ di lato $2k$ con $k \in \mathbb{N}$ e la formula di riduzione abbiamo

$$\iint_{Q_k} e^{-x^2-y^2} dx dy = \int_{-k}^k dx \int_{-k}^k e^{-x^2-y^2} dy = \left(\int_{-k}^k e^{-x^2} dx \right) \left(\int_{-k}^k e^{-y^2} dy \right).$$

Passando al limite per $k \rightarrow \infty$, confrontando con il risultato precedente e tenendo conto che la variabile di integrazione è muta troviamo

$$\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx \right)^2 = \pi,$$

e in definitiva

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}. \quad (5.5.13)$$

5.6 Passaggio al limite sotto il segno d'integrale

In questo paragrafo vediamo sotto quali condizioni vale l'implicazione

$$f_h \rightarrow f \quad \implies \quad \int_E f_h dx \rightarrow \int_E f dx. \quad (5.6.14)$$

Vedremo che in molti casi la sola convergenza puntuale della successione implica la convergenza degli integrali. Iniziamo col considerare il caso in cui f_h è una successione monotona crescente. Per poter dare l'enunciato nella sua forma più generale ci sarà utile estendere la nozione di integrale al caso di funzioni a valori in $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty] = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Definizione 5.6.1 *Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ misurabile, e sia $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Diremo che f è misurabile se per ogni $t \in \mathbb{R}$ l'insieme $\{f > t\}$ è misurabile. Se f è misurabile gli insiemi*

$$\{f = +\infty\} = \bigcap_{h=1}^{\infty} \{f > h\} \quad \{f = -\infty\} = \bigcap_{h=1}^{\infty} \{f \leq -h\}$$

sono misurabili. Se $f \geq 0$ poniamo

$$\int_E f dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_E f \wedge R dx$$

e nel caso generale poniamo

$$\int_E f dx = \int_E f^+ dx - \int_E f^- dx$$

purché almeno uno degli integrali sia finito.

Restano vere le proprietà di monotonia, invarianza e linearità dell'integrale, con l'eccezione di indeterminazioni del tipo $\infty - \infty$. È importante osservare che vale l'implicazione

$$\int_E |f| dx < +\infty \quad \implies \quad m_n(E \cap \{|f| = +\infty\}) = 0.$$

Quindi se $f \in L^1(E)$ (cioè il suo modulo ha integrale finito su E) allora gli insiemi $\{f = \pm\infty\}$ sono trascurabili. Usando la disuguaglianza $|f| \geq R\chi_{\{|f|>R\}}$ si ha infatti

$$\int_E |f| dx \geq R\mu(\{|f| > R\}) \geq Rm_n(\{|f| = +\infty\}).$$

Dividendo ambo i membri per R e passando al limite per $R \rightarrow +\infty$ si ottiene $m_n(\{|f| = \infty\}) = 0$.

Teorema 5.6.2 (di Beppo Levi della convergenza monotona) *Sia (f_h) una successione crescente di funzioni misurabili definite in E a valori in $[0, +\infty]$. Posto, per ogni $x \in E$,*

$$f(x) = \sup_{h \geq 1} f_h(x) = \lim_{h \rightarrow +\infty} f_h(x),$$

si ha

$$\int_E f \, dx = \lim_{h \rightarrow +\infty} \int_E f_h \, dx.$$

DIM. Notiamo che la convergenza puntuale delle f_h ad f non va dimostrata, perché è ovvia per monotonia, così come la convergenza degli integrali,

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} \int_E f_h \, dx = \alpha.$$

Inoltre, dalla convergenza puntuale segue anche che f è integrabile, e per la monotonia dell'integrale, che $\alpha \leq \int_E f \, dx$. Pertanto, se $\alpha = +\infty$ non c'è nulla da dimostrare. Altrimenti, fissati $s \in \mathcal{S}_+(X)$ tale che $s \leq f$ e $0 < c < 1$, poniamo

$$E_h = \{x \in E : f_h(x) > cs(x)\}$$

e osserviamo che E_h è misurabile per ogni h , e che $\bigcup_h E_h = E$. Per ogni $x \in E$, o $f(x) = 0$, e allora $x \in E_1$, oppure $f(x) > 0$ e $cs(x) < f(x)$; ne segue:

$$\alpha = \lim_{h \rightarrow +\infty} \int_E f_h \, dx \geq \lim_{h \rightarrow +\infty} \int_{E_h} f_h \, dx \geq \lim_{h \rightarrow +\infty} c \int_{E_h} s \, dx = c \int_E s \, dx,$$

da cui, per $c \rightarrow 1$, $\alpha \geq \int_E s \, dx$. Per l'arbitrarietà di $s \leq f$, si ha $\alpha \geq \int_E f \, d\mu$ e la tesi è provata. QED

Osservazione 5.6.3 L'ipotesi di non negatività sulle funzioni f_h può essere indebolita richiedendo che esista una funzione $g \in L^1(E)$ tale che

$$f_h(x) \geq g(x) \quad \forall x \in E, \quad h \geq 1.$$

Basta infatti applicare il teorema sopra a $f_h - g$. Senza alcuna ipotesi il teorema di convergenza monotona può essere falso: ad esempio se $E = \mathbb{R}$ e $f_h = -\chi_{\mathbb{R} \setminus [-h, h]}$ allora $f \equiv 0$ e

$$\int_{\mathbb{R}} f_h(x) \, dx = -\infty \quad \forall h, \quad \text{mentre} \quad \int_{\mathbb{R}} f(x) \, dx = 0.$$

Una importante conseguenza del teorema di convergenza monotona è il fatto che le operazioni di serie e di integrale commutano

$$\int_E \left(\sum_{h=1}^{\infty} f_h \right) dx = \sum_{h=1}^{\infty} \int_E f_h \, dx \tag{5.6.15}$$

purché tutte le funzioni f_h siano non negative. Infatti basta passare al limite per $N \rightarrow +\infty$ nell'uguaglianza

$$\int_E \sum_{h=1}^N f_h dx = \sum_{h=1}^N \int_E f_h dx$$

ed il teorema di convergenza monotona garantisce che

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_E \sum_{h=1}^N f_h dx = \int_E \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{h=1}^N f_h dx = \int_E \sum_{h=1}^{\infty} f_h dx.$$

È importante osservare che quando l'implicazione (5.6.14) non vale, c'è comunque una relazione tra il limite degli integrali e l'integrale del limite. Ricordiamo che per una successione numerica (a_n) si pone

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = \sup_{n \in \mathbf{N}} \inf_{k \geq n} a_k, \quad \limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = \inf_{n \in \mathbf{N}} \sup_{k \geq n} a_k.$$

Lemma 5.6.4 (Lemma di Fatou) *Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ un insieme misurabile e $(f_h) \subset L^1(E)$ una successione di funzioni misurabili a valori in $[0, +\infty]$. Allora*

$$\int_E \liminf_{h \rightarrow +\infty} f_h dx \leq \liminf_{h \rightarrow +\infty} \int_E f_h dx.$$

DIM. Ricordiamo anzitutto che

$$\liminf_{h \rightarrow \infty} f_h = \sup_{h \in \mathbf{N}} \inf_{k \geq h} f_k, \quad \limsup_{h \rightarrow \infty} f_h = \inf_{h \in \mathbf{N}} \sup_{k \geq h} f_k$$

e che $\liminf_{h \rightarrow \infty} f_h \leq \limsup_{h \rightarrow \infty} f_h$, con uguaglianza se e solo se esiste il limite delle f_h . Pertanto, posto per ogni $h \in \mathbf{N}$, $f = \liminf_{h \rightarrow \infty} f_h$ e $g_h = \inf_{k \geq h} f_k$, si ha che g_h è una successione crescente che converge puntualmente a f in E , ed inoltre ovviamente vale $g_h \leq f_h$ per ogni h . Applicando il teorema della convergenza monotona alla successione (g_h) , risulta:

$$\int_E f dx = \lim_{h \rightarrow \infty} \int_E g_h dx = \liminf_{h \rightarrow \infty} \int_E g_h dx \leq \liminf_{h \rightarrow \infty} \int_E f_h dx.$$

□ QED

Osserviamo che, come per il teorema della convergenza monotona, si può sostituire l'ipotesi che le f_h siano tutte positive con l'ipotesi che esista una funzione $g \in L^1(E)$ tale che $f_h \geq g$ per ogni h .

Per trattare limiti non monotoni di successioni è utile il

Teorema 5.6.5 (Teorema della convergenza dominata) *Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ un insieme misurabile e $(f_h) \subset L^1(E)$ convergente puntualmente a $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ per m_n -quasi ogni $x \in E$. Supponiamo che esista una funzione $g \in L^1(E)$ tale che*

$$|f_h(x)| \leq g(x) \quad \text{per q.o. } x \in E, \quad h \geq 1. \quad (5.6.16)$$

Allora $f \in L^1(E)$ e

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} \int_E f_h(x) dx = \int_E f(x) dx.$$

DIM. Notiamo che $f(x) \leq g(x)$ q.o. in E , e che $|f - f_h| \rightarrow 0$, sicché $0 \leq 2g - |f - f_h| \rightarrow 2g$. Ricordiamo anche che vale la seguente relazione tra \liminf e \limsup , che segue subito dalle proprietà dell'estremo superiore e dell'estremo inferiore:

$$\liminf_{h \rightarrow \infty} -a_h = -\limsup_{h \rightarrow \infty} a_h$$

per ogni successione (a_h) . Applicando il Lemma di Fatou alla successione $2g - |f - f_h|$ si ha:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_E 2g = \int_E \lim_{h \rightarrow \infty} (2g - |f - f_h|) \leq \liminf_{h \rightarrow \infty} \int_E (2g - |f - f_h|) \\ &= \int_E 2g + \liminf_{h \rightarrow \infty} \left(- \int_E |f - f_h| \right) = \int_E 2g - \limsup_{h \rightarrow \infty} \int_E |f - f_h| \end{aligned}$$

da cui $\limsup_{h \rightarrow \infty} \int_E |f - f_h| = 0$ e quindi

$$\limsup_{h \rightarrow \infty} \left| \int_E f - \int_E f_h \right| \leq \limsup_{h \rightarrow \infty} \int_E |f - f_h| = 0$$

e il teorema è dimostrato. \square

Osservazione 5.6.6

- (a) Il teorema della convergenza dominata può essere falso se non vale la (5.6.16): sia ad esempio $X = \mathbb{R}$ e

$$f_h(x) = \begin{cases} h^3 x(1/h - x) & \text{se } x \in [0, 1/h]; \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Allora f_h converge puntualmente a zero in \mathbb{R} ma

$$\int_{\mathbb{R}} f_h(x) dx = \frac{1}{6}.$$

- (b) Con lo stesso ragionamento usato per dedurre la (5.6.15) si dimostra che

$$\sum_{h=1}^{\infty} \int_X f_h d\mu = \int_X \sum_{h=1}^{\infty} f_h d\mu$$

purché esista una funzione $g \in L^1(X)$ tale che

$$\left| \sum_{i=1}^N f_i(x) \right| \leq g(x) \quad \forall x \in X, \quad N \geq 1.$$

5.7 Integrali dipendenti da parametri

Sia $A \subset \mathbb{R}^m$ un aperto, $E \subset \mathbb{R}^n$ un insieme misurabile e sia $f(t, x) : A \times E \rightarrow \mathbb{R}$. Supponiamo che per ogni $t \in A$ la funzione $x \mapsto f(t, x)$ sia sommabile in E . È allora definita la funzione

$$F(t) = \int_E f(t, x) dx \quad t \in A.$$

Il problema che affrontiamo in questo paragrafo è quello della regolarità di F in funzione di quella di f . Incominciamo dalla continuità:

Teorema 5.7.1 *Supponiamo che $t \mapsto f(t, x)$ sia continua in A per m_n -quasi ogni $x \in E$ ed esista una funzione $g \in L^1(E)$ tale che*

$$|f(t, x)| \leq g(x) \quad \forall t \in A, x \in E. \quad (5.7.17)$$

Allora F è continua in A .

Dim. Grazie alla caratterizzazione del limite di funzioni tramite limiti di successioni, basta verificare la continuità per successioni. Sia $t \in A$ e $(t_h) \subset A$ convergente a t . Essendo le funzioni $t \mapsto f(t, x)$ continue per m_n -quasi ogni $x \in E$, abbiamo

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} f(t_h, x) = f(t, x)$$

per m_n -quasi ogni $x \in E$. Dall'ipotesi (5.7.17) segue che si può applicare il teorema della convergenza dominata:

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} F(t_h) = \lim_{h \rightarrow +\infty} \int_E f(t_h, x) dx = \int_E f(t, x) dx = F(t).$$

\square

Esempio 5.7.2 *Il teorema precedente può essere falso se non vale la (5.7.17): sia $A = E = \mathbb{R}$ e*

$$f(t, x) = \begin{cases} \frac{|t| - |x|}{t^2} & \text{se } |x| < |t|; \\ 0 & \text{se } |x| \geq |t|. \end{cases}$$

Si trova allora $F(t) = 1$ per $t \neq 0$ e $F(0) = 0$, quindi F non è continua.

Passiamo ora allo studio della regolarità C^k :

Teorema 5.7.3 *Supponiamo che $t \mapsto f(t, x)$ sia di classe C^k in A per ogni $x \in E$ ed esista una funzione $g \in L^1(E)$ tale che*

$$\sum_{|p| \leq k} |D^p f(t, x)| \leq g(x) \quad \forall t \in A, x \in E. \quad (5.7.18)$$

Allora F è di classe C^k in A e

$$D^p F(t) = \int_E D^p f(t, x) dx \quad \forall t \in A, |p| \leq k.$$

Dim. La dimostrazione si può fare per induzione su k . Limitiamoci al caso $k = 1$: sia $i \in \{1, \dots, m\}$ e verifichiamo che

$$D_i F(t) = \int_E D_i f(t, x) dx \quad \forall t \in A. \quad (5.7.19)$$

Si osservi che se vale la (5.7.19) allora $D_i F$ è continua in A per il teorema precedente. Fissato $t \in A$ ed una successione $(r_h) \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tendente a zero osserviamo che

$$\frac{F(t + r_h e_i) - F(t)}{r_h} = \int_E \frac{f(t + r_h e_i, x) - f(t, x)}{r_h} dx.$$

Fissato un $x \in E$, per il teorema di Lagrange esistono $s_h(x)$ compresi tra 0 e r_h tali che

$$\frac{f(t + r_h e_i, x) - f(t, x)}{r_h} = D_i f(t + s_h(x), x).$$

Passando al limite in h si ha

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} \frac{f(t + r_h e_i, x) - f(t, x)}{r_h} = D_i f(t, x).$$

Inoltre, usando la (5.7.18) otteniamo

$$\left| \frac{f(t + r_h e_i, x) - f(t, x)}{r_h} \right| = |D_i f(t + s_h(x), x)| \leq g(x),$$

quindi il teorema della convergenza dominata implica

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow +\infty} \frac{F(t + r_h e_i) - F(t)}{r_h} &= \lim_{h \rightarrow +\infty} \int_E \frac{f(t + r_h e_i, x) - f(t, x)}{r_h} dx \\ &= \int_E D_i f(t, x) dx. \end{aligned}$$

Essendo la successione r_h arbitraria, la funzione F ha derivata parziale i -esima in t e vale la (5.7.19). \square

Il teorema sopra continua a valere se si suppone solamente che $t \mapsto f(t, x)$ è di classe C^k in A per m_n -quasi ogni $x \in E$. In tal caso la funzione $D^p(t, x)$, il cui integrale su E dà $D^p F(t)$, è definita in modo arbitrario nell'insieme trascurabile degli $x \in E$ tali che $t \mapsto f(t, x)$ non è C^k .

Nel caso $m = 1$ possiamo anche supporre che l'insieme di integrazione dipenda da t :

$$F(t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(t, x) dx.$$

Allora $F(t) = G(t, \alpha(t), \beta(t))$ con

$$G(t, u, v) = \int_u^v f(t, x) dx.$$

Se f è continua nelle variabili (t, x) e C^1 nella variabile t abbiamo (si usa il teorema fondamentale del calcolo integrale)

$$\begin{aligned} G_t(t, u, v) &= \int_u^v f_t(t, x) dx \\ G_u(t, u, v) &= -f(t, u) \\ G_v(t, u, v) &= f(t, v) \end{aligned}$$

quindi dal teorema di derivazione della funzione composta otteniamo

$$\begin{aligned} F'(t) &= G_t(t, \alpha(t), \beta(t)) + G_u(t, \alpha(t), \beta(t))\alpha'(t) + G_v(t, \alpha(t), \beta(t))\beta'(t) \\ &= \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f_t(t, x) dx + \beta'(t)f(t, \beta(t)) - \alpha'(t)f(t, \alpha(t)). \end{aligned}$$

5.8 Superficie regolari ed integrali di superficie

In questo paragrafo definiamo il concetto di superficie in \mathbb{R}^3 e di integrale su una superficie.

Definizione 5.8.1 (Superficie regolari) Sia $D \subset \mathbb{R}^2$ la chiusura di un aperto connesso (detto anche dominio) e sia $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ una applicazione. Diciamo che φ è una superficie regolare in \mathbb{R}^3 se

1. $\varphi \in C^1(D)$, φ è iniettiva in $\overset{\circ}{D}$,
2. la matrice jacobiana $D\varphi$ ha rango due in ogni punto di $\overset{\circ}{D}$.

Osservazione 5.8.2 Notiamo che la superficie è un'applicazione mentre chiamiamo sostegno di φ l'insieme immagine di φ .

Può accadere che il sostegno di una superficie regolare racchiuda una porzione limitata dello spazio. Tale situazione è considerata nella seguente definizione.

Definizione 5.8.3 (Superficie chiuse) Una superficie regolare si dice chiusa se il suo sostegno è la frontiera di un insieme aperto connesso.

Ricordiamo che la matrice $D\varphi = D\varphi(u, v)$ è data da

$$D\varphi(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial\varphi_1}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial\varphi_2}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial\varphi_3}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial\varphi_3}{\partial v}(u, v) \end{pmatrix},$$

dunque la condizione sul rango significa che i due vettori colonna

$$\varphi_u = \frac{\partial\varphi}{\partial u}(u, v), \quad \varphi_v = \frac{\partial\varphi}{\partial v}(u, v)$$

sono linearmente indipendenti in ogni punto $(u, v) \in \overset{\circ}{D}$, e questo assicura che essi generano un piano, detto il *piano tangente al sostegno della superficie*, in ogni punto di $\varphi(\overset{\circ}{D})$. Indichiamo con $(A, B, C) = \varphi_u \wedge \varphi_v$ il loro prodotto vettoriale, cioè

$$\begin{aligned} A &= \det \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi_2}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial\varphi_2}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial\varphi_3}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial\varphi_3}{\partial v}(u, v) \end{pmatrix} \\ B &= \det \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi_3}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial\varphi_3}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial\varphi_1}{\partial v}(u, v) \end{pmatrix} \\ C &= \det \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial\varphi_1}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial\varphi_2}{\partial v}(u, v) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Risulta che (A, B, C) è ortogonale a φ_u e φ_v , pertanto è ortogonale al piano tangente e sarà detto *vettore normale alla superficie*.

Sia (u_0, v_0) un punto interno al dominio di φ e sia $(x_0, y_0, z_0) = \varphi(u_0, v_0)$. Posto

$$A_0 = A(u_0, v_0), \quad B_0 = B(u_0, v_0), \quad C_0 = C(u_0, v_0)$$

l'equazione del piano tangente al sostegno di φ nel punto (x_0, y_0, z_0) è data da

$$\boxed{A_0 (x - x_0) + B_0 (y - y_0) + C_0 (z - z_0) = 0.}$$

Esempi 5.8.4

1. Un caso interessante di superficie si ottiene a partire da una funzione di classe C^1 $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ definita in un dominio $D \subset \mathbb{R}^2$. Allora si definisce *superficie cartesiana* individuata da f la superficie

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} \varphi_1(x, y) = x \\ \varphi_2(x, y) = y \\ \varphi_3(x, y) = f(x, y) \end{cases} \quad (x, y) \in D$$

In questo caso il versore normale è dato da

$$\nu(x, y) = \frac{(-f_x(x, y), -f_y(x, y), 1)}{\sqrt{1 + (f_x(x, y))^2 + (f_y(x, y))^2}}.$$

2. Un esempio di superficie regolare è costituito dal toro (vedi Figura – 5.2) ottenuto ruotando intorno all'asse z , la circonferenza nel piano $y = 0$ di centro $(R, 0, 0)$ e raggio $r < R$. La sua rappresentazione parametrica è data da

$$\varphi(t, \vartheta) = \begin{cases} \varphi_1(t, \vartheta) = (R + r \cos t) \cos \vartheta \\ \varphi_2(t, \vartheta) = (R + r \cos t) \sin \vartheta \\ \varphi_3(t, \vartheta) = r \sin t \end{cases} \quad (t, \vartheta) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$$

Un facile calcolo fornisce $\|\varphi_t \wedge \varphi_\vartheta\| = r(R + r \cos t)$, che, per la condizione $r < R$, è sempre maggiore di zero.

3. A volte il sostegno di una superficie è determinato come l'insieme S delle soluzioni di un'equazione $F(x, y, z) = 0$. Ad esempio la superficie sferica di centro l'origine e raggio 1 è individuata dall'equazione $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$. Se la funzione F è di classe C^1 e il suo gradiente è diverso da zero in un punto $(x_0, y_0, z_0) \in S$, per esempio $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, allora in un intorno di tale punto S è il grafico di una superficie cartesiana $z = \varphi(x, y)$. Analogo discorso si può fare per il sostegno di una curva in \mathbb{R}^2 che può essere formato dalle soluzioni di una equazione $F(x, y) = 0$. Questa problematica è trattata dal Teorema del Dini, che qui non consideriamo.

Definizione 5.8.5 (Superficie equivalenti) Sia $\varphi : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una superficie regolare. Sia T un dominio connesso del piano e $\Phi : T \rightarrow D$ una trasformazione invertibile, C^1 con inversa C^1 e con determinante jacobiano non nullo in $\overset{\circ}{T}$. Allora anche $\psi : T \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da $\psi(s, t) = \varphi(\Phi(s, t))$ per $(s, t) \in T$ è una superficie regolare e si dice che φ e ψ sono equivalenti.

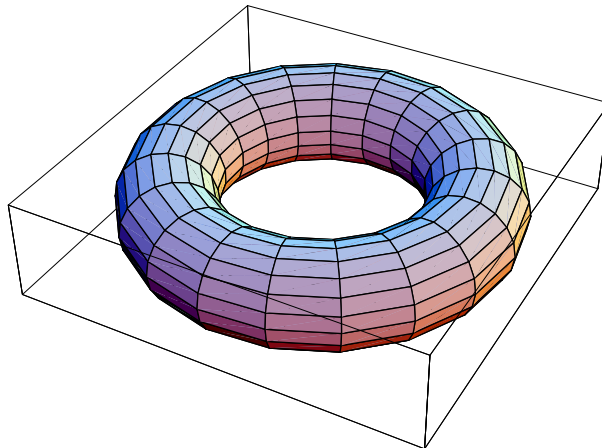


Figura – 5.2: Un toro.

Consideriamo ora una superficie regolare $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ e supponiamo che il dominio D sia un insieme regolare, tale cioè che la sua frontiera ∂D sia una curva regolare.

Definizione 5.8.6 (Area di una superficie) Definiamo area della superficie φ il numero

$$\mathcal{A}(\varphi) = \iint_D \sqrt{A^2(u, v) + B^2(u, v) + C^2(u, v)} \, dudv = \iint_D \|\varphi_u \wedge \varphi_v\| \, dudv.$$

Notiamo che nel caso di una superficie cartesiana (vedi Esempio 5.8.4.1) la sua area è data dalla formula

$$\mathcal{A}(\varphi) = \iint_D \sqrt{1 + (f_x)^2 + (f_y)^2} \, dxdy = \iint_D \sqrt{1 + \|\nabla f(x, y)\|^2} \, dxdy.$$

Nel caso del toro (vedi Esempio 5.8.4.2) la sua area è data da

$$\mathcal{A}(\varphi) = \int_0^{2\pi} dt \int_0^{2\pi} r(R + r \cos t) \, d\vartheta = 4\pi^2 Rr.$$

Accanto all'area si possono dare la definizione di integrale superficiale di una funzione f e di flusso di un campo vettoriale F su una superficie regolare φ .

Definizione 5.8.7 (Integrale di superficie) Sia φ una superficie regolare con dominio regolare, e supponiamo che f sia una funzione reale continua sul sostegno di φ . Definiamo integrale superficiale di f su φ il numero

$$\begin{aligned} \int_{\varphi} f \, d\sigma &= \iint_D f(\varphi(u, v)) \sqrt{A^2(u, v) + B^2(u, v) + C^2(u, v)} \, dudv \\ &= \iint_D f(\varphi(u, v)) \|\varphi_u \wedge \varphi_v\| \, dudv. \end{aligned}$$

Definizione 5.8.8 (Flusso di un campo vettoriale) Siano φ una superficie regolare con dominio regolare, ed F un campo vettoriale continuo sul sostegno di φ . Definiamo flusso di F attraverso φ il numero

$$\int_{\varphi} (F \cdot \nu) d\sigma = \iint_D F(\varphi(u, v)) \cdot (\varphi_u \wedge \varphi_v) du dv.$$

Anche gli integrali di superficie godono delle abituali proprietà di linearità, positività e additività.

Osservazioni 5.8.9

1. L'area di una superficie φ non cambia se si considera una superficie ψ equivalente a φ (vedi Definizione 5.8.5). Analogamente, l'integrale su φ di una funzione f non dipende dalla parametrizzazione, ma da f e dal sostegno di φ , cioè $\int_{\varphi} f d\sigma = \int_{\psi} f d\sigma$ per due superficie φ e ψ equivalenti. La verifica di queste proprietà dipende dalla formula di cambiamento di variabili negli integrali doppi, che mostra come, nelle nostre ipotesi, si possa trasformare l'integrale su φ in quello su ψ attraverso un cambiamento regolare di coordinate.
2. Il flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie è definito usando il campo vettoriale $\varphi_u \wedge \varphi_v$, che, come si è detto, è normale al sostegno di φ e non si annulla mai grazie alla condizione che il rango di $D\varphi$ sia sempre 2. Ponendo

$$\nu = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|}. \quad (5.8.20)$$

si ottiene un campo vettoriale unitario normale al sostegno di φ che permette di ricondurre il flusso di un campo F all'integrale di superficie della funzione reale $f = F \cdot \nu$, componente del campo F lungo ν . Il vettore ν si chiama *versore normale alla superficie* φ . Per quanto riguarda il comportamento del flusso rispetto ad un cambio di parametrizzazione, però, bisogna tener conto del fatto che ν ha un verso che può cambiare se si cambia la rappresentazione parametrica del sostegno della superficie. Con la notazione del punto precedente, chiamando (u, v) le coordinate in D e (s, t) quelle in T , si ha:

$$\begin{aligned} \int_{\varphi} F \cdot \nu d\sigma &= \int_{\psi} F \cdot \nu d\sigma & \text{se} & \quad \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|} = \frac{\psi_s \wedge \psi_t}{\|\psi_s \wedge \psi_t\|}, \\ \int_{\varphi} F \cdot \nu d\sigma &= - \int_{\psi} F \cdot \nu d\sigma & \text{se} & \quad \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|} = - \frac{\psi_s \wedge \psi_t}{\|\psi_s \wedge \psi_t\|}. \end{aligned}$$

In particolare, se si considera una superficie chiusa si avrà un flusso *entrante* se il vettore normale determinato dalla parametrizzazione scelta è diretto verso l'interno della superficie, *uscente* nel caso opposto.

3. Se φ è una superficie regolare non limitata, si possono definire la sua area (eventualmente infinita), l'integrale di una funzione continua e il flusso di un campo vettoriale continuo usando la tecnica degli insiemi invadenti. Supposto che $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ sia una superficie regolare, sia (K_h) una successione di domini regolari contenuti in D e invadenti D . Detta φ_h la restrizione di φ a K_h , si pone

$$\mathcal{A}(\varphi) = \lim_{h \rightarrow +\infty} \mathcal{A}(\varphi_h);$$

se poi f e F sono rispettivamente una funzione reale ed un campo vettoriale continui sul sostegno di φ , se

$$\sup_{h \in \mathbb{N}} \int_{\varphi_h} |f| d\sigma < +\infty \quad \text{e} \quad \sup_{h \in \mathbb{N}} \int_{\varphi_h} \|F\| d\sigma < +\infty$$

allora si pone

$$\int_{\varphi} f d\sigma = \lim_{h \rightarrow +\infty} \int_{\varphi_h} f d\sigma \quad \text{e} \quad \int_{\varphi} F \cdot \nu d\sigma = \lim_{h \rightarrow +\infty} \int_{\varphi_h} F \cdot \nu d\sigma.$$

5.9 Teorema della divergenza e formula di Stokes

Il teorema della divergenza generalizza al caso degli integrali multipli il secondo teorema fondamentale del calcolo per gli integrali semplici. Questo teorema fu scoperto dal matematico tedesco Carl J.F. Gauss (1777-1855) e dal matematico inglese George Green (1793-1841) principalmente in connessione con la teoria del campo elettrico.

Soffermiamoci separatamente sui casi di dimensione due e tre. Se D è un dominio, diremo che è *regolare* se la sua frontiera ∂D è una curva regolare nel caso $n = 2$ ed una superficie regolare nel caso $n = 3$.

Teorema 5.9.1 (Teorema della divergenza in \mathbb{R}^2) *Sia D un dominio regolare di \mathbb{R}^2 . Se $F : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ è un campo vettoriale di classe C^1 , si ha*

$$\iint_D \operatorname{div} F \, dx dy = \int_{\partial D} F \cdot \nu \, ds,$$

dove ∂D denota la curva avente la frontiera di D come sostegno, ν è il versore normale a ∂D orientato verso l'esterno di D e la divergenza $\operatorname{div} F$ di $F = (F_1, F_2)$ è data da

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y}. \quad (5.9.21)$$

Analogamente in tre dimensioni risulta:

Teorema 5.9.2 (Teorema della divergenza in \mathbb{R}^3) Sia T un dominio regolare di \mathbb{R}^3 . Se $F = (F_1, F_2, F_3) : T \rightarrow \mathbb{R}^3$ è un campo vettoriale di classe C^1 , si ha

$$\iiint_T \operatorname{div} F \, dx dy dz = \int_{\partial T} F \cdot \nu \, d\sigma,$$

dove ∂T denota la superficie avente la frontiera di T come sostegno, ν è il versore normale a ∂T orientato verso l'esterno di T e la divergenza $\operatorname{div} F$ di F è data da

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}. \quad (5.9.22)$$

Osservazione 5.9.3 Il teorema precedente afferma che l'integrale della divergenza di F su T è pari al flusso del campo uscente da T . Formalmente, possiamo perciò definire l'operatore divergenza applicato al campo vettoriale F nel punto x_0 ponendo (per esempio, in \mathbb{R}^3)

$$\operatorname{div} F(x_0) = \lim_{\varrho \rightarrow 0} \frac{1}{m_3(B_\varrho(x_0))} \int \int_{\partial B_\varrho(x_0)} F \cdot \nu \, d\sigma. \quad (5.9.23)$$

L'espressione precedente ha il vantaggio di essere indipendente dal sistema di coordinate: è importante notare, infatti, che le espressioni (5.9.21), (5.9.22) valgono solo in coordinate cartesiane. Se il sistema di coordinate è un altro, l'espressione analitica della divergenza è diversa. per esempio, in coordinate sferiche, per un campo $F = (F_\varrho, F_\vartheta, F_\phi)$ si ha

$$\operatorname{div} F = \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial}{\partial \varrho} (\varrho^2 F_\varrho) + \frac{1}{\varrho \sin \phi} \frac{\partial F_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\varrho \sin \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (\sin \phi F_\phi),$$

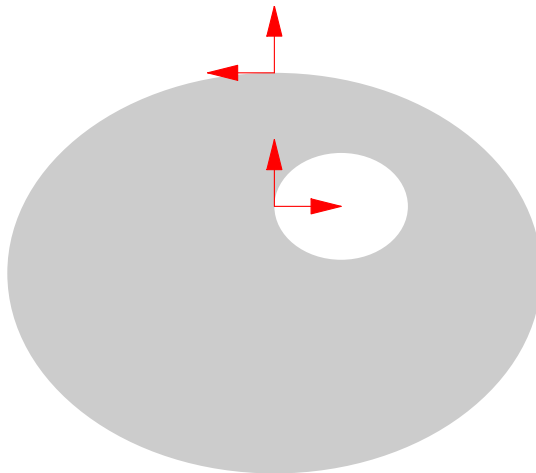
formula che si può dedurre dall'espressione precedente, o, più semplicemente, ricavare da (5.9.22) usando il teorema sulla derivata della funzione composta.

Discutiamo ora il caso della formula di Stokes, prima nel caso $n = 2$. Osserviamo che è possibile scegliere un verso di percorrenza per ∂D in modo che, detto τ il versore tangente e ν il versore normale esterno a D , la coppia (ν, τ) si possa trasportare con una roto-traslazione (movimento rigido) del piano su quella dei versori degli assi coordinati. Intuitivamente questo corrisponde a richiedere di percorrere ∂D in modo da lasciare D alla propria sinistra. È facile vedere che se $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ allora risulta $\tau = (-\nu_2, \nu_1)$. Indichiamo quest'orientamento con $+\partial D$ (vedi la Figura – 5.3). Il teorema della divergenza 5.9.1 può essere riformulato nel modo seguente.

Teorema 5.9.4 (Formula di Stokes in \mathbb{R}^2) Sia $G = (G_1, G_2) : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ un'applicazione di classe C^1 nel dominio regolare $D \subset \mathbb{R}^2$. Allora risulta

$$\int_{+\partial D} G \cdot d\ell = \iint_D \left(\frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y} \right) dx dy.$$

La formula di Stokes si ottiene immediatamente applicando il Teorema della divergenza al campo $F = (G_2, -G_1)$ e tenendo conto della relazione tra ν e τ .

Figura – 5.3: Orientazione positiva della frontiera di D .

Osservazione 5.9.5 Notiamo che scegliendo il campo G in modo che sia

$$\frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y} = 1$$

è possibile conoscere l'area dell'insieme D calcolando un integrale di linea su ∂D . Mostriamo alcuni semplici esempi:

$$m(D) = \int_{+\partial D} (0, x) \cdot d\ell = \int_{+\partial D} (-y, 0) \cdot d\ell = \frac{1}{2} \int_{+\partial D} (-y, x) \cdot d\ell,$$

che corrispondono alle scelte $G(x, y) = (0, x)$, $G(x, y) = (-y, 0)$, $G(x, y) = \frac{1}{2}(-y, x)$. Ad esempio se consideriamo l'ellisse $D = \left\{ (x, y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$ ($a, b > 0$), una parametrizzazione della sua frontiera è $(x(t), y(t)) = (a \cos t, b \sin t)$ con $t \in [0, 2\pi]$ ed allora usando la prima formula otteniamo:

$$m(D) = \int_0^{2\pi} x(t) y'(t) dt = \int_0^{2\pi} a \cos t b \cos t dt = ab \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = \pi ab.$$

Per enunciare la formula di Stokes in tre dimensioni, consideriamo una superficie regolare con dominio compatto chiusura di un aperto connesso $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ ed indichiamo con ν il campo dei versori normali individuato da φ (vedi (5.8.20)). Sia A un dominio regolare tale che $\overline{A} \subset \overset{\circ}{D}$ e sia $S = \varphi(A)$. Sia γ una curva regolare a tratti che orienta positivamente il bordo di A . Allora diciamo che la curva $\varphi \circ \gamma$ orienta positivamente il bordo della superficie S . Infine ricordiamo che il rotore di un campo vettoriale $F =$

(F_1, F_2, F_3) di classe C^1 è il campo vettoriale definito da

$$\operatorname{rot} F = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right). \quad (5.9.24)$$

Teorema 5.9.6 (Formula di Stokes in \mathbb{R}^3) Sia $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ una superficie regolare, siano A ed S come sopra e sia $F = (F_1, F_2, F_3) : B \rightarrow \mathbb{R}^3$ un'applicazione di classe C^1 in un aperto $B \subset \mathbb{R}^3$ contenente S . Allora risulta

$$\int_S \operatorname{rot} F \cdot \nu \, d\sigma = \int_{+\partial S} F \cdot d\ell,$$

dove ν è il campo dei versori normali ad S e il bordo $+\partial S$ è orientato nel verso positivo corrispondente all'orientamento della superficie S .

Osservazione 5.9.7 Il Teorema di Stokes potrebbe essere falso se scegliessimo $A = D$ e $S = \varphi(D)$ in quanto il campo dei versori normali su S potrebbe essere discontinuo. Si può considerare, per esempio il campo vettoriale $F(x, y, z) = (0, 0, y)$ e la superficie φ , detta *nastro di Möbius*, definita da

$$\varphi(t, \vartheta) = \begin{cases} \varphi_1(t, \vartheta) = 2 \cos \vartheta + t \cos \vartheta \cos \left(\frac{\vartheta}{2}\right) \\ \varphi_2(t, \vartheta) = 2 \sin \vartheta + t \sin \vartheta \cos \left(\frac{\vartheta}{2}\right) \\ \varphi_3(t, \vartheta) = t \sin \left(\frac{\vartheta}{2}\right) \end{cases} \quad (t, \vartheta) \in [-1, 1] \times [0, 2\pi]$$

Verificare che in questo caso risulta

$$\int_S \operatorname{rot} F \cdot \nu \, d\sigma = 2 \int_{+\partial S} F \cdot d\ell.$$

Poiché sul nastro di Möbius non esiste un campo di vettori normali continuo, si dice che esso è una *superficie non orientabile*.

Osservazione 5.9.8 Per il rotore di un campo vettoriale regolare F si possono formulare considerazioni analoghe a quelle nell'osservazione 5.9.3. Si può dimostrare che per ogni x_0 nel dominio di F esiste un unico vettore ω tale che per ogni coppia di vettori unitari u, v risulta

$$\frac{\partial(F \cdot v)}{\partial u}(x_0) - \frac{\partial(F \cdot u)}{\partial v}(x_0) = (u \times v) \cdot \omega.$$

tale vettore è il rotore di F in x_0 ed ha in coordinate cartesiane l'espressione (5.9.24). Usando il teorema di Stokes se ne può dare la seguente espressione integrale: per ogni vettore unitario ν risulta

$$\omega \cdot \nu = \operatorname{rot} F(x_0) \cdot \nu = \lim_{\varrho \rightarrow 0} \frac{1}{\pi \varrho^2} \int_{\Gamma_\varrho} F \cdot d\ell,$$

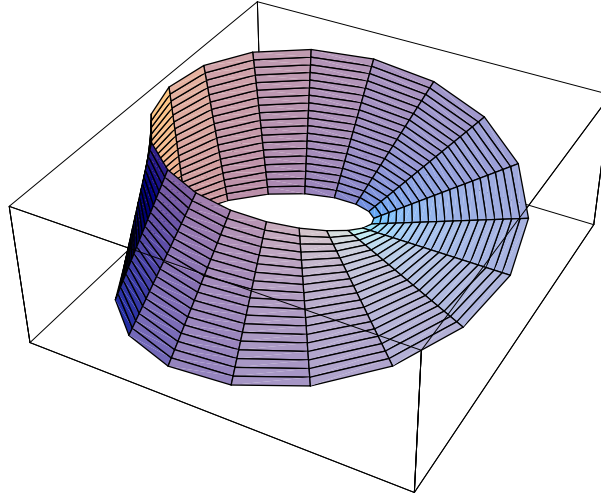


Figura – 5.4: Il nastro di Möbius.

dove Γ_ϱ è una circonferenza di centro x_0 e raggio ϱ , bordo di un disco del piano per x_0 ortogonale a ν .

Usando come nel caso della divergenza il teorema di derivazione della funzione composta, per un campo espresso (ad esempio) in coordinate sferiche in \mathbb{R}^3 , $F = (F_\varrho, F_\vartheta, F_\phi)$ si ottiene

$$\operatorname{rot} F = \left(\frac{1}{\varrho \sin \phi} \left[\frac{\partial}{\partial \phi} (F_\vartheta \sin \phi) - \frac{\partial F_\phi}{\partial \vartheta} \right], \frac{1}{\varrho} \left[\frac{\partial}{\partial \varrho} (\varrho F_\phi) - \frac{\partial F_\varrho}{\partial \phi} \right], \frac{1}{\varrho} \left[\frac{1}{\sin \phi} \frac{\partial F_\varrho}{\partial \vartheta} - \frac{\partial}{\partial \varrho} (\varrho F_\vartheta) \right] \right).$$

CAPITOLO 6

ANALISI COMPLESSA

In questo capitolo studiamo le funzioni definite in un sottoinsieme di \mathbb{C} ed a valori in \mathbb{C} . La teoria delle funzioni di variabile complessa è stata principalmente sviluppata dal matematico francese Augustin Louis Cauchy (1789-1857), che fondò le sue ricerche sulla rappresentazione integrale che sarà detta appunto “formula integrale di Cauchy”, e successivamente dal matematico tedesco Karl Weierstrass (1815-1897), che basò le sue ricerche sugli sviluppi in serie di potenze.

Indicheremo con z, w gli elementi generici di \mathbb{C} , e spesso identificheremo \mathbb{C} con \mathbb{R}^2 . In questo modo potremo utilizzare le nozioni topologiche introdotte nel Capitolo 1 associate alla distanza tra due numeri complessi data da $d(z, w) = |z - w|$. Dunque se $z = x + iy$ e $w = u + iv$ risulta $d(z, w) = \sqrt{(x - u)^2 + (y - v)^2}$. Tutte le nozioni di intorno sferico di un punto, interno, esterno, frontiera, chiusura e derivato di un insieme si ottengono immediatamente come nel caso di \mathbb{R}^2 . Analogamente si estendono le nozioni di insieme limitato, connesso, connesso per poligoni, stellato e convesso.

All’insieme \mathbb{C} viene aggiunto un solo punto all’infinito, denotato ∞ , i cui intorni sono dati dagli insiemi che contengono il complementare di un insieme limitato; per semplicità, così come usiamo spesso intorni sferici dei punti del piano, useremo spesso complementari di cerchi come intorni di ∞ , cioè insiemi del tipo $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$, con $R > 0$. Osserviamo che ∞ *non coincide* con il simbolo $+\infty$ usato in campo reale (vedi la definizione 6.1.3).

6.1 Successioni in \mathbb{C} , limiti e continuità di funzioni complesse

In questo paragrafo non introduciamo alcuna nozione nuova, ma ci limitiamo a riformulare le nozioni di convergenza e continuità, già viste in \mathbb{R}^2 , con il formalismo dei numeri complessi.

Sia $(z_h)_h$ una successione a valori in \mathbb{C} , cioè con $z_h \in \mathbb{C}$ per ogni $h \in \mathbb{N}$. Allora:

Definizione 6.1.1 *Si dice che la successione $(z_h)_h$ è limitata se esiste $r > 0$ tale che*

$$\forall h \in \mathbb{N} \quad |z_h| \leq r.$$

Definizione 6.1.2 Si dice che la successione $(z_h)_h$ converge, o è convergente, ad un elemento $z_0 \in \mathbb{C}$, e si scrive $\lim_{h \rightarrow \infty} z_h = z_0$, se:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \nu > 0 \text{ tale che } \forall h \in \mathbb{N} \quad h > \nu \implies |z_h - z_0| < \varepsilon.$$

Definizione 6.1.3 Si dice che la successione $(z_h)_h$ diverge, o è divergente, e si scrive $\lim_{h \rightarrow +\infty} z_h = \infty$, se $\lim_{h \rightarrow +\infty} |z_h| = +\infty$, cioè:

$$\forall M > 0 \exists \nu > 0 \text{ tale che } \forall h \in \mathbb{N} \quad h > \nu \implies |z_h| > M.$$

Come nel caso di \mathbb{R}^2 , si ha:

Proposizione 6.1.4 Se $(z_h)_h$ è una successione convergente di \mathbb{C} , allora $(z_h)_h$ è limitata.

Proposizione 6.1.5 Sia $(z_h)_h$ una successione di \mathbb{C} . Supponiamo che $z_h = x_h + iy_h$ per ogni $h \in \mathbb{N}$. Sono equivalenti:

- (i) la successione $(z_h)_h$ è convergente a $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$;
- (ii) la successione reale $(x_h)_h$ converge ad x_0 e la successione reale $(y_h)_h$ converge ad y_0 .

Esempio 6.1.6

1. Sia $z_h = \frac{1}{h} + i\frac{1+h}{h}$ per ogni $h \in \mathbb{N}$. Allora la successione data converge a i in \mathbb{C} .
2. Esistono successioni limitate, ma non convergenti. Quindi possiamo concludere che anche in \mathbb{C} la limitatezza della successione è solo una condizione necessaria, ma non sufficiente per la convergenza.

Come al solito, se $(z_h)_h$ è una successione di \mathbb{C} e $(k_h)_h$ è una successione strettamente crescente di numeri naturali, la successione $(z_{k_h})_h$ si dice successione estratta, o sottosuccessione, di $(z_h)_h$.

Con le successioni si possono caratterizzare gli insiemi chiusi e definire gli insiemi compatti come per \mathbb{R}^2 .

Consideriamo ora funzioni $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ definite su un insieme Ω non vuoto contenuto in \mathbb{C} . Si osserva che, per ogni $z \in \Omega$, posto $u(z) := \operatorname{Re} f(z)$ e $v(z) := \operatorname{Im} f(z)$, si ottiene $f = u + iv$ e quindi assegnare una funzione complessa in Ω equivale ad assegnarne due reali in Ω . Se poi si riguarda Ω come un sottoinsieme di \mathbb{R}^2 , le funzioni u e v possono essere considerate come funzioni reali di due variabili reali:

$$\forall z = (x, y) \in \Omega : \quad u(x, y) := \operatorname{Re} f(z) ; \quad v(x, y) := \operatorname{Im} f(z) .$$

Definizione 6.1.7 Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ e sia $z_0 \in \mathbb{C}$ un punto di accumulazione di Ω . Sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione. Si dice che f tende a $w \in \mathbb{C}$ per z che tende a z_0 , e si scrive $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w$, se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ tale che } \forall z \in \Omega, \quad 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - w| < \varepsilon.$$

Si dice che f tende ad ∞ per z che tende a z_0 , e si scrive $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$, se

$$\forall M > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ tale che } \forall z \in \Omega, \quad 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z)| > M.$$

Se Ω è illimitato, si può definire anche il limite di f all'infinito, ponendo

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = w$$

(con w complesso) se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $R > 0$ tale che per ogni $z \in \Omega$ con $|z| > R$ risulta $|f(z) - w| < \varepsilon$. Se $w = \infty$ si dà l'analoga definizione, con le modifiche ovvie.

Si riconosce facilmente che, posto $f = u + iv$, $z_0 = x_0 + iy_0$ e $w = s + it$, risulta

$$w = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \iff s = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x,y), \quad t = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x,y).$$

Pertanto, lo studio del limite di una funzione complessa equivale allo studio di due limiti reali. Le proprietà dei limiti (caratterizzazione del limite mediante successioni, unicità, operazioni sui limiti e forme indeterminate) derivano dalla equivalenza precedente. Vedremo che questo punto di vista non è sufficiente per discutere le proprietà *differenziali* delle funzioni in campo complesso.

Esempi 6.1.8

1. Si consideri il seguente limite

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2}{z + \bar{z}}$$

Da quanto detto e tenendo presente che

$$\frac{z^2}{z + \bar{z}} = \frac{x^2 - y^2}{2x} + iy,$$

lo studio del limite precedente è equivalente a quello dei seguenti

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{2x}, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y$$

Siccome il primo limite non esiste allora non esiste il limite proposto. Per vedere che il primo limite non esiste basta considerare $x > 0$, $k > 0$ e $y = \sqrt{kx}$. Allora si ha:

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^2 - kx}{2x} = -\frac{k}{2}$$

che dipende da k , pertanto il limite non esiste.

2. Si consideri il seguente limite

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z}}{z}.$$

Si riconosce facilmente che, per ogni z reale e diverso da 0, si ha $\bar{z} = z$ e quindi $\frac{\bar{z}}{z} = 1$, mentre, per ogni z immaginario puro e diverso da 0, si ha $\frac{\bar{z}}{z} = -1$ pertanto in ogni intorno di 0, la funzione in esame assume i valori 1 e -1 e quindi non può tendere verso alcun limite.

Diamo ora la definizione di funzione continua.

Definizione 6.1.9 Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$. Sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione e sia $z_0 \in \Omega$. Si dice che f è continua in z_0 se z_0 è un punto isolato di Ω oppure

$$\exists \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0),$$

o equivalentemente, se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{tale che } \forall z \in \Omega, |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon.$$

Inoltre, si dice che f è continua in Ω se essa è continua in ogni punto di Ω .

Come al solito somme e prodotti di funzioni continue sono ancora funzioni continue.

Definizione 6.1.10 Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ e sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione. Si dice che f è limitata in Ω se $f(\Omega)$ è limitato in \mathbb{C} .

Poiché per le funzioni a valori complessi non si può parlare di massimo o minimo, vale la seguente versione del teorema di Weierstrass.

Teorema 6.1.11 (Weierstrass) Sia K un sottoinsieme compatto di \mathbb{C} e sia $f : K \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione definita e continua in K . Allora $f(K)$ è un insieme compatto di \mathbb{C} .

6.2 Funzioni olomorfe

A differenza delle nozioni precedenti, quella di funzione derivabile non è riconducibile alla semplice differenziabilità delle parti reale ed immaginaria, e presenta diverse proprietà che non valgono nel caso reale e sulle quali conviene pertanto soffermarsi.

Definizione 6.2.1 Siano Ω un sottoinsieme aperto di \mathbb{C} ed $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione complessa. Se $z_0 \in \Omega$, si dice che f è derivabile in z_0 se il seguente limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \quad (\text{oppure}) \quad \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad (6.2.1)$$

esiste ed è finito in \mathbb{C} . In tal caso, si pone

$$f'(z_0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}.$$

Come per le funzioni reali, la derivata $f'(z_0)$ può essere denotata anche con uno dei seguenti simboli

$$Df(z_0); \quad \frac{df}{dz}(z_0); \quad (Df(z))_{z=z_0}; \quad \left(\frac{df}{dz}(z) \right)_{z=z_0}.$$

Una funzione derivabile in ogni punto di un sottoinsieme A di Ω viene denominata *olomorfa in A* . Infine, f si dice *olomorfa* se è olomorfa in Ω .

Osservazioni 6.2.2

- Nel seguito, per semplificare le dimostrazioni, aggiungeremo alla definizione di funzione olomorfa la richiesta che f' sia continua. Useremo questa ipotesi nella dimostrazione del fondamentale Teorema 6.5.3.
- Utilizzando i noti simboli $o(h)$ di Landau visti nel corso di Analisi Matematica I, si riconosce facilmente che la derivabilità di f in z_0 equivale all'esistenza di $\ell \in \mathbb{C}$ tale che

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + \ell h + o(h) \quad \text{in } z_0$$

ed in tal caso si ha $\ell = f'(z_0)$. Infatti, se f è derivabile in z_0 , risulta

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0) - f'(z_0)h}{h} = 0,$$

da cui $f(z_0 + h) - f(z_0) - f'(z_0)h = o(h)$ e quindi anche $\ell = f'(z_0)$. Viceversa, se $f(z_0 + h) = f(z_0) + \ell h + o(h)$ in z_0 , risulta

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \ell,$$

e quindi f è derivabile in z_0 con $\ell = f'(z_0)$.

- Dalla osservazione precedente, si ricava immediatamente che, se f è derivabile in z_0 , allora f è anche continua in z_0 .
- Poiché la definizione di derivabilità si avvale dello stesso limite considerato nel caso reale, per tale nozione continuano a valere le regole di derivazione già note nel caso reale. In particolare, valgono le seguenti proprietà.

1. Se $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ e $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ sono derivabili in $z_0 \in \Omega$, allora $f + g$ è derivabile in z_0 e si ha $(f + g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)$;

2. Se $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ e $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ sono derivabili in $z_0 \in \Omega$, allora $f \cdot g$ è derivabile in z_0 e si ha $(f \cdot g)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$;
3. Se $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ è derivabile in $z_0 \in \Omega$ e $f(z) \neq 0$ per ogni $z \in \Omega$, allora $1/f$ è derivabile in z_0 e si ha

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(z_0) = -\frac{f'(z_0)}{(f(z_0))^2};$$

4. Se $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ e $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ sono derivabili in $z_0 \in \Omega$ e $g(z) \neq 0$ per ogni $z \in \Omega$, allora f/g è derivabile in z_0 e si ha

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{(g(z_0))^2};$$

5. Se $\Omega, \Gamma \subset \mathbb{C}$ e se $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ è derivabile in $z_0 \in \Omega$ e $g : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$ è derivabile in $w_0 := f(z_0)$, allora la funzione composta $g \circ f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ definita ponendo, per ogni $z \in \Omega$, $(g \circ f)(z) = g(f(z))$ è derivabile in z_0 e si ha

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0)) \cdot f'(z_0).$$

6. Sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione iniettiva e si supponga che sia derivabile in $z_0 \in \Omega$ con $f'(z_0) \neq 0$. Posto $\Gamma = f(\Omega)$, si consideri la funzione inversa $f^{-1} : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$ definita ponendo, per ogni $w \in \Gamma$, $f^{-1}(w) = z$ con $z \in \Omega$ tale che $f(z) = w$. Se f^{-1} è continua in $w_0 := f(z_0)$, allora f^{-1} è anche derivabile in w_0 e si ha

$$(f^{-1})'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)}.$$

Esempi 6.2.3

1. Consideriamo la funzione potenza $f_n : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definita da $f_n(z) := z^n$ ($n \in \mathbb{N}$). Dimostriamo che $f'_n(z) = nz^{n-1}$. Proviamolo per induzione su n . Dalla definizione segue immediatamente che la formula vale per $n = 1$. Supponiamola vera per n , allora $f_{n+1}(z) = zf_n(z)$. Per l'ipotesi di induzione e per la regola sulla derivata del prodotto risulta

$$D(f_{n+1}(z)) = D(zf_n(z)) = f_n(z) + zD(f_n(z)) = z^n + znz^{n-1} = (n+1)z^n.$$

Dalla regola sulla derivata del quoziente segue che la formula vale anche per n intero negativo.

2. Si consideri la funzione $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definita ponendo, per ogni $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = \operatorname{Re} z$. Per ogni $z_0 \in \mathbb{C}$, risulta

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Re}(z_0 + h) - \operatorname{Re} z_0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Re} h}{h}$$

e quest'ultimo limite non esiste in quanto per $h \neq 0$ reale si ha $\operatorname{Re} h/h = 1$ mentre per h immaginario puro si ha $\operatorname{Re} h/h = 0$. Quindi f non è derivabile in alcun punto di \mathbb{C} .

3. Si consideri la funzione $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definita ponendo, per ogni $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = \bar{z}$. Per ogni $z_0 \in \mathbb{C}$, risulta

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\overline{z_0 + h} - \bar{z}_0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\bar{h}}{h}$$

e quest'ultimo limite non esiste come si è visto nell'Esempio 6.1.8,2. Quindi f non è derivabile in alcun punto di \mathbb{C} .

Dimostriamo a questo punto il primo importante risultato sulle funzioni derivabili. Come al solito, considerate le parti reali ed immaginarie di f , si scrive $f = u + iv$ con u, v funzioni reali di due variabili reali.

Teorema 6.2.4 (Teorema di Cauchy-Riemann) *Siano $\Omega \subset \mathbb{C}$ un insieme aperto ed $f = u + iv : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione complessa. Se $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$, le seguenti proposizioni sono equivalenti*

- a) f è derivabile in z_0 ;
- b) Le funzioni u e v sono differenziabili in (x_0, y_0) e si ha:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0). \quad (6.2.2)$$

Inoltre risulta

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0). \quad (6.2.3)$$

DIM. Supponiamo che f sia derivabile in z_0 e poniamo $f'(z_0) = \alpha + i\beta$. Per ogni $h = p + iq \neq 0$, risulta

$$f(z_0 + h) = u(x_0 + p, y_0 + q) + iv(x_0 + p, y_0 + q); \quad f(z_0) = u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0)$$

e inoltre

$$f'(z_0)h = (\alpha + i\beta)(p + iq) = (\alpha p - \beta q) + i(\alpha q + \beta p)$$

e quindi, dall'Osservazione 6.2.2 si ha

$$\begin{aligned} & u(x_0 + p, y_0 + q) + iv(x_0 + p, y_0 + q) \\ &= u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0) + (\alpha + i\beta)(p + iq) + o(h) \\ &= u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0) + (\alpha p - \beta q) + i(\alpha q + \beta p) + o(h). \end{aligned}$$

Separando le parti reali e immaginarie si ottengono le equazioni

$$\begin{cases} u(x_0 + p, y_0 + q) = u(x_0, y_0) + (\alpha p - \beta q) + o(\sqrt{p^2 + q^2}), \\ v(x_0 + p, y_0 + q) = v(x_0, y_0) + (\alpha q + \beta p) + o(\sqrt{p^2 + q^2}), \end{cases}$$

dove si è potuto considerare $o(\sqrt{p^2 + q^2})$ al posto di $o(h)$ in quanto il rapporto $\frac{\sqrt{p^2 + q^2}}{h} = |h|/h$ è limitato. Dalle equazioni precedenti si ricava

$$\begin{aligned} \lim_{(p,q) \rightarrow (0,0)} \frac{u(x_0 + p, y_0 + q) - u(x_0, y_0) - (\alpha p - \beta q)}{\sqrt{p^2 + q^2}} &= 0, \\ \lim_{(p,q) \rightarrow (0,0)} \frac{v(x_0 + p, y_0 + q) - v(x_0, y_0) - (\alpha q + \beta p)}{\sqrt{p^2 + q^2}} &= 0, \end{aligned}$$

e quindi u e v sono differenziabili in (x_0, y_0) e inoltre

$$du(x_0, y_0)(p, q) = \alpha p - \beta q; \quad dv(x_0, y_0)(p, q) = \alpha q + \beta p.$$

Pertanto

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) &= du(x_0, y_0)(1, 0) = \alpha, & \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) &= du(x_0, y_0)(0, 1) = -\beta, \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) &= dv(x_0, y_0)(1, 0) = \beta, & \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) &= dv(x_0, y_0)(0, 1) = \alpha, \end{aligned}$$

da cui seguono (6.2.2) e (6.2.3).

Il viceversa si può dimostrare ripercorrendo a ritroso la dimostrazione già svolta. □

Corollario 6.2.5 *Siano Ω un sottoinsieme aperto connesso di \mathbb{C} ed $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa e tale che $f(\Omega) \subset \mathbb{R}$. Allora f è costante.*

DIM. Infatti, posto $f = u + iv$, risulta $v = 0$ e inoltre, dalle equazioni di Cauchy-Riemann (6.2.2), $D_x u = D_y v = 0$, $D_y u = -D_x v = 0$. Quindi u , e conseguentemente f , è costante (vedi Teorema 2.1.10). □

Dal Corollario precedente si ottiene subito che le funzioni $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $|z|$ non possono essere olomorfe, altrimenti dovrebbero essere costanti. Si osservi che il corollario precedente rimane valido se si suppone che $f = u + ci$ con $c \in \mathbb{R}$ costante fissata.

Osservazione 6.2.6 Si dimostrerà in seguito che se f è olomorfa, le funzioni u e v sono derivabili parzialmente infinite volte. Da ciò e dalle equazioni di Cauchy-Riemann segue allora facilmente che u e v verificano le seguenti condizioni:

$$\begin{aligned} \Delta u &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \\ \Delta v &= \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0. \end{aligned}$$

Infatti, per ogni $(x, y) \in \Omega$, dalle equazioni di Cauchy-Riemann (6.2.2), si ha:

$$\Delta u(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}(x, y) - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}(x, y) = 0,$$

per il Teorema 2.1.15. Analogamente si ottiene il risultato per v .

L'operatore Δ è detto operatore di Laplace e le funzioni u per cui $\Delta u = 0$ sono dette funzioni armoniche. Tali funzioni sono molto importanti in matematica e nelle applicazioni.

Dalla discussione svolta in questo paragrafo emerge la differenza essenziale tra la derivabilità in senso reale e quella in senso complesso: la derivabilità complessa di una funzione $f = u + iv$ non implica semplicemente che le parti reale ed immaginaria di f sono derivabili in senso reale, ma implica che la coppia (u, v) (pensata come coppia di funzioni reali di due variabili reali) è *soluzione di un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali*, una proprietà molto più restrittiva che, come già accennato, ha conseguenze notevoli che saranno discusse a partire dal Paragrafo 6.5.

6.3 Serie di potenze in campo complesso

La teoria delle successioni e serie di funzioni di variabile complessa non presenta novità rispetto al caso reale. Valgono le nozioni di convergenza puntuale e uniforme per le successioni di funzioni e di convergenza puntuale, assoluta, uniforme e totale per le serie di funzioni complesse, basta utilizzare il modulo al posto del valore assoluto.

Per lo studio delle funzioni olomorfe è fondamentale lo studio delle serie di potenze, che, come già visto nel corso di Analisi Matematica 1, è naturalmente ambientato in campo complesso. Richiamiamo brevemente i risultati già visti.

Definizione 6.3.1 *Data una successione $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$ di numeri complessi e un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ si dice serie di potenze con coefficienti (c_k) centrata in z_0 la serie*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} c_k (z - z_0)^k. \quad (6.3.4)$$

Per la serie (6.3.4) si definisce il *raggio di convergenza* ϱ come segue:

$$\varrho = \sup \left\{ r \in [0, +\infty[: \sum_{k=0}^{+\infty} |c_k| r^k \text{ converge} \right\}.$$

Come nel caso reale $\varrho \in [0, +\infty]$. Vale il seguente Teorema.

Teorema 6.3.2 (Proprietà delle serie di potenze in \mathbb{C}) *Data la serie di potenze (6.3.4), sia $\varrho \in [0, +\infty]$ il suo raggio di convergenza.*

- (i) Se $\varrho = 0$ allora la serie (6.3.4) converge solo per $z = z_0$.
- (ii) Se $\varrho = +\infty$ allora la serie (6.3.4) converge assolutamente per ogni $z \in \mathbb{C}$ e converge totalmente in ogni intorno circolare $B_r(z_0)$.
- (iii) Se $0 < \varrho < +\infty$ allora la serie (6.3.4) converge assolutamente per ogni $z \in B_\varrho(z_0)$, converge totalmente in ogni intorno chiuso di z_0 contenuto in $B_\varrho(z_0)$ e non converge per alcun z tale che $|z - z_0| > \varrho$.
- (iv) Supposto $\varrho > 0$, sia $f : B_\varrho(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$ la somma della serie (6.3.4); allora f è olomorfa e vale l'eguaglianza:

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} k c_k (z - z_0)^{k-1} \quad (6.3.5)$$

per ogni $z \in B_\varrho(z_0)$.

- (v) Posto $\ell = \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|}$,¹ si ha $\varrho = 1/\ell$, con le convenzioni che se $\ell = 0$ allora $\varrho = +\infty$ e se $\ell = +\infty$ allora $\varrho = 0$. Da questa formula segue che anche la serie nel punto (iv) ha lo stesso raggio di convergenza ϱ . Pertanto, per ricorrenza, la somma di una serie di potenze ha derivate di ogni ordine.

Osserviamo che se $c_k \neq 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ ed esiste $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{|c_{k+1}|}{|c_k|} = \ell$ allora il raggio di convergenza della serie (6.3.4) è $1/\ell$ (con la usuale convenzione).

6.3.a Le funzioni elementari

Oltre ai polinomi e alle funzioni razionali sono olomorfe nel loro dominio le funzioni elementari fondamentali.

1. L'esponenziale complesso è definito in \mathbb{C} . Se $z = x + iy$ allora

$$e^z = e^x (\cos y + i \sin y).$$

Evidentemente l'esponenziale è una funzione $2\pi i$ periodica ed assume tutti i valori complessi tranne lo zero. La funzione esponenziale è iniettiva se viene ristretta ad una striscia del tipo $\mathbb{R} + i] \alpha, \alpha + 2\pi]$ per qualunque $\alpha \in \mathbb{R}$.

2. Le funzioni circolari e iperboliche sono definite su tutto \mathbb{C} da:

$$\begin{aligned} \cos z &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, & \sin z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \\ \cosh z &= \frac{e^z + e^{-z}}{2}, & \sinh z &= \frac{e^z - e^{-z}}{2}. \end{aligned}$$

¹Ricordiamo dalle dispense di Analisi Matematica I che il limite superiore di una successione di numeri reali $(a_k)_k$ è dato da $\limsup_{k \rightarrow \infty} a_k = \inf_{n \in \mathbb{N}} \left(\sup_{k \geq n} a_k \right)$.

3. Le funzioni precedenti sono olomorfe in \mathbb{C} in quanto verificano le condizioni del Teorema 6.2.4 e sono sviluppabili in serie di potenze in tutto \mathbb{C} :

$$\begin{aligned} e^z &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}, \\ \cos z &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}, & \sin z &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \\ \cosh z &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!}, & \sinh z &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}. \end{aligned}$$

4. Le funzioni potenza, esponenziale, circolari e iperboliche non sono iniettive perciò per invertirle dovremo estendere il concetto di funzione e ammettere funzioni f che ad un punto associano un insieme di valori $f(z)$, dette funzioni *polidrome*. Data una funzione polidroma f in Ω si dice *determinazione di f* ogni funzione $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ tale che, per ogni $z \in \Omega$ si ha $g(z) \in f(z)$.
5. Se $n \geq 2$, si definisce funzione radice n -esima, la funzione polidroma $\sqrt[n]{z} : \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{C})$ definita ponendo, per ogni $z = \varrho e^{i\vartheta} \in \mathbb{C}$,

$$\sqrt[n]{z} = \{ \sqrt[n]{\varrho} e^{i\frac{\vartheta+2k\pi}{n}} ; k = 0, 1, \dots, n-1 \}.$$

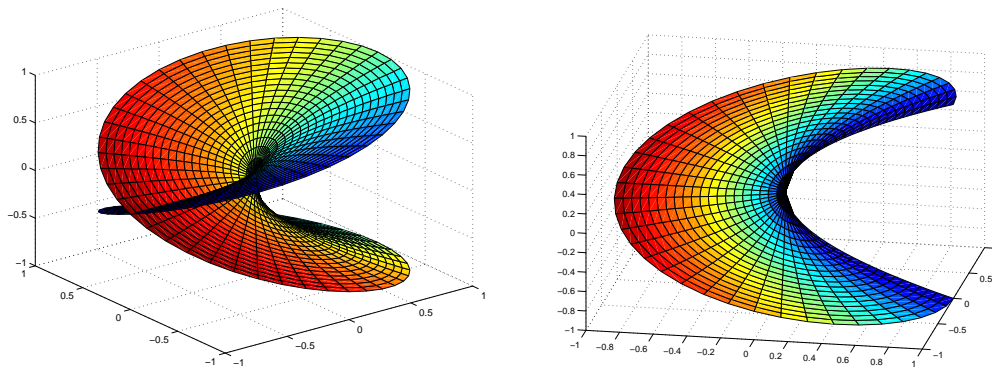


Figura – 6.1: Grafico della parte reale di \sqrt{z} e di una sua determinazione.

6. Se $z = \varrho(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$, l'insieme degli argomenti di z viene denotato con $\arg z$; dunque

$$\arg z := \{ \vartheta + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z} \}.$$

Inoltre, l'argomento principale di z verrà denotato con $\text{Arg } z$; quindi $\text{Arg } z$ è l'unico elemento di $\arg z$ tale che $-\pi < \text{Arg } z \leq \pi$.

7. La funzione *logaritmo in campo complesso* è la funzione polidroma $\log : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{C})$ definita ponendo, per ogni $z = \varrho e^{i\vartheta} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ da:

$$\log z := \log |z| + i \arg z = \log \varrho + i(\vartheta + 2k\pi) \quad (k \in \mathbb{Z}). \quad (6.3.6)$$

Posto $\Gamma = \{(x, 0) \in \mathbb{C} : x \leq 0\}$, la determinazione $\text{Log} : \mathbb{C} \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$ definita ponendo, per ogni $z = \varrho e^{i\vartheta} \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$

$$\text{Log } z := \log \varrho + i \text{Arg } z$$

viene denominata funzione *logaritmo principale*. La determinazione $\text{Log } z$ è olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \Gamma$, cioè in \mathbb{C} privato del semiasse reale negativo e la sua derivata vale $\frac{1}{z}$. Tale funzione non è continua sulla semiretta Γ . Infatti se $z = x + iy$ con $x < 0$ e $y > 0$ risulta $\lim_{z \rightarrow x} \text{Log } z = \log |x| + i\pi$, mentre se $y < 0$ allora $\lim_{z \rightarrow x} \text{Log } z = \log |x| - i\pi$. Infine $\lim_{z \rightarrow 0} \text{Log } z = \infty$.

Una situazione analoga si presenta se si considera una determinazione del logaritmo ottenuta escludendo dal piano complesso un'altra semiretta uscente dall'origine.

8. Utilizzando il logaritmo, si può definire la *potenza con esponente complesso*. Se $z \neq 0$ e $w \in \mathbb{C}$ si definisce la funzione polidroma $z^w = e^{w \log z}$. Scegliendo il logaritmo principale si ottiene la funzione $z^w = e^{w \text{Log } z}$. Ad esempio si ha $i^i = e^{i \text{Log } i} = e^{-\pi/2}$. Notiamo che per questa determinazione della potenza complessa non sempre valgono le usuali regole sulle potenze.

6.4 Cammini ed integrali curvilinei

Anche in questo paragrafo non introduciamo nozioni nuove, ma ci limitiamo a riprendere alcuni concetti già visti nel Capitolo 3 ed a riformularli nel linguaggio delle variabili complesse. Una curva piana, quando si identifica il piano con \mathbb{C} , viene chiamata tradizionalmente anche *curva di Jordan*, vedi Teorema 6.4.2. Ovviamente, una curva piana $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ si può scrivere in notazione complessa nella forma $\varphi(t) = x(t) + iy(t)$, con $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni continue. Fatta questa identificazione, continuiamo ad usare il linguaggio introdotto nel Capitolo 3. Per brevità, chiameremo *cammino* una curva di Jordan $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ regolare a tratti, cioè continua e tale che esistano $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ con φ regolare in $[t_{k-1}, t_k]$ per ogni $k = 1, \dots, n$. Un cammino chiuso viene spesso denominato anche *circuito*. Un esempio molto semplice di circuito che verrà utilizzato frequentemente nel seguito è costituito dalla circonferenza $\gamma_r : [0; 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ di raggio $r > 0$ definita ponendo, per ogni $t \in [0, 2\pi]$, $\gamma_r(t) := r e^{it}$. In questo caso si ha $x(t) := r \cos t$ e $y(t) := r \sin t$; si tratta ovviamente di un cammino semplice e chiuso la cui lunghezza è data da

$$\ell(\gamma_r) = \int_0^{2\pi} |ir e^{it}| dt = r \int_0^{2\pi} dt = 2\pi r.$$

Se $z_0 \in \mathbb{C}$, la circonferenza $\gamma_{z_0, r} : [0; 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ di centro z_0 e raggio $r > 0$ si può definire ponendo, per ogni $t \in [0, 2\pi]$,

$$\gamma_{z_0, r} := z_0 + r e^{it} .$$

La lunghezza rimane ovviamente invariata.

Si considerino ora un sottoinsieme aperto $\Omega \subset \mathbb{C}$ ed una funzione $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ continua. Se $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ è un cammino con sostegno contenuto in Ω , si definisce integrale curvilineo di f lungo φ , il seguente numero complesso

$$\int_{\varphi} f(z) dz := \int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt . \quad (6.4.7)$$

Se il cammino φ è chiuso l'integrale curvilineo si indica di solito con $\oint_{\varphi} f(z) dz$.

Enunciamo a questo punto alcune semplici proprietà degli integrali curvilinei lungo un cammino.

1. (*Proprietà di linearità degli integrali curvilinei*) Siano $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ due funzioni continue e sia $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ un cammino tale che $\varphi^* \subset \Omega$. Allora

$$\int_{\varphi} (f + g)(z) dz = \int_{\varphi} f(z) dz + \int_{\varphi} g(z) dz ;$$

Inoltre, se $c \in \mathbb{C}$,

$$\int_{\varphi} (cf)(z) dz = c \int_{\varphi} f(z) dz .$$

2. (*Teorema della media*) Sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione continua e sia $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ un cammino tale che $\varphi^* \subset \Omega$. Allora

$$\left| \int_{\varphi} f(z) dz \right| \leq \max_{z \in \varphi^*} |f(z)| \ell(\varphi) . \quad (6.4.8)$$

Infatti,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\varphi} f(z) dz \right| &= \left| \int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(\varphi(t))| \cdot |\varphi'(t)| dt \\ &\leq \max_{z \in \varphi^*} |f(z)| \int_a^b |\varphi'(t)| dt = \max_{z \in \varphi^*} |f(z)| \ell(\varphi) . \end{aligned}$$

3. (*Proprietà di decomposizione degli integrali curvilinei*) Si definisce innanzitutto il cammino unione (denominato spesso anche cammino somma) di due cammini (vedi anche la definizione 3.2.4). Siano $\varphi_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ e $\varphi_2 : [b, c] \rightarrow \mathbb{C}$ due cammini tali

che $\varphi_1(b) = \varphi_2(b)$. Allora, si verifica facilmente che la curva $\varphi_1 \oplus \varphi_2 : [a, c] \rightarrow \mathbb{C}$ definita ponendo, per ogni $t \in [a, c]$,

$$(\varphi_1 \oplus \varphi_2)(t) := \begin{cases} \varphi_1(t) & \text{se } t \in [a, b], \\ \varphi_2(t) & \text{se } t \in [b, c], \end{cases}$$

è a sua volta un cammino, il quale viene appunto denominato unione dei cammini φ_1 e φ_2 . Si osserva che se Ω è un sottoinsieme aperto di \mathbb{C} e se $\varphi_1^* \subset \Omega$ e $\varphi_2^* \subset \Omega$, allora anche $(\varphi_1 \oplus \varphi_2)^* \subset \Omega$. Se inoltre $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ è una funzione continua, vale ovviamente la seguente proprietà

$$\int_{\varphi_1 \oplus \varphi_2} f(z) dz = \int_{\varphi_1} f(z) dz + \int_{\varphi_2} f(z) dz.$$

4. (*Integrale curvilineo sul cammino opposto*) Si consideri un cammino $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$. Si definisce cammino opposto a φ il cammino $\varphi^o : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ definito ponendo, per ogni $t \in [a, b]$, $\varphi^o(t) := \varphi(a + b - t)$. Si verifica facilmente che $(\varphi^o)^* = \varphi^*$ e inoltre $\varphi^o(a) = \varphi(b)$ mentre $\varphi^o(b) = \varphi(a)$. Se Ω è un sottoinsieme aperto di \mathbb{C} tale che $\varphi^* \subset \Omega$ e se $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ è una funzione continua, si ha usando il cambiamento di variabile $\tau = a + b - t$:

$$\begin{aligned} \int_{\varphi^o} f(z) dz &= \int_a^b f(\varphi^o(t)) (\varphi^o)'(t) dt \\ &= - \int_b^a f(\varphi(\tau)) (-\varphi'(\tau)) d\tau = - \int_{\varphi} f(z) dz. \end{aligned}$$

Quindi l'integrale curvilineo di una funzione dipende dal verso di percorrenza della curva.

Esempio 6.4.1 Sia $n \in \mathbb{Z}$ e consideriamo la funzione $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ definita da $f(z) = z^n$. Allora risulta $\forall r > 0$ se $n \neq -1$

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma_r} z^n dz &= \int_0^{2\pi} r^n e^{int} \cdot ir e^{it} dt = ir^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt \\ &= ir^{n+1} \left[\frac{e^{i(n+1)t}}{i(n+1)} \right]_0^{2\pi} = 0 \end{aligned}$$

mentre

$$\oint_{\gamma_r} \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{r e^{it}} ir e^{it} dt = \int_0^{2\pi} i dt = 2\pi i,$$

indipendentemente dal raggio.

Concludiamo ora le proprietà generali degli integrali curvilinei con un importante risultato. Osserviamo che, anche se l'enunciato è estremamente intuitivo, la sua dimostrazione nella piene generalità è abbastanza delicata.

Teorema 6.4.2 (Teorema di Jordan) *Sia $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ un cammino semplice e chiuso. Allora esiste uno ed un solo sottoinsieme aperto connesso e limitato Ω_φ di \mathbb{C} tale che $\partial\Omega_\varphi = \varphi^*$.*

6.5 Funzioni analitiche e funzioni olomorfe

Sia Ω un sottoinsieme aperto di \mathbb{C} e sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione complessa. Si dice che f è analitica se, per ogni $z_0 \in \Omega$, esistono $r > 0$ ed $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$ successione di numeri complessi tali che, per ogni $z \in B_r(z_0)$,

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k (z - z_0)^k. \quad (6.5.9)$$

Quindi una funzione è analitica se si può esprimere localmente come somma di una serie di potenze.

Per le funzioni analitiche abbiamo il seguente risultato, già enunciato nel Teorema 6.3.2(iv).

Teorema 6.5.1 *Siano Ω un sottoinsieme aperto di \mathbb{C} e sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione analitica. Allora f è olomorfa ed inoltre la sua derivata f' è data da*

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} k c_k (z - z_0)^{k-1}, \quad (6.5.10)$$

ed è anch'essa una funzione analitica con lo stesso raggio di convergenza di f .

DIM. Supponiamo $z_0 = 0$. Se la serie in (6.5.9) converge in $B_r(0)$, per il criterio della radice anche la serie (6.5.10) converge in $B_r(0)$. Fissiamo z e facciamo vedere che f è derivabile in z . Per $h \neq 0$ tale che $|h| \leq \delta < r - |z|$, abbiamo

$$f(z+h) - f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k ((z+h)^k - z^k) = h \sum_{k=0}^{\infty} c_k \sum_{m=0}^{k-1} (z+h)^{k-1-m} z^m,$$

da cui

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \left[\sum_{m=0}^{k-1} (z+h)^{k-1-m} z^m \right].$$

L'espressione in parentesi contiene k termini, ciascuno $\leq \varrho = |z| + \delta$, sicché è maggiorata da $k\varrho^{k-1}$. Segue che la serie converge uniformemente per $|h| \leq \delta$ e quindi è ivi continua. Passando al limite per $h \rightarrow 0$ si ha quindi

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k z^{k-1}.$$

□

Naturalmente iterando l'uso del teorema precedente si ha che una funzione analitica è derivabile infinite volte e tutte le derivate sono analitiche.

Faremo vedere ora che ogni funzione olomorfa è analitica. Da ciò seguirà che le funzioni olomorfe sono funzioni dotate di derivate di ogni ordine. È opportuno riflettere su questo risultato per capire quanta differenza ci sia tra la richiesta di derivabilità complessa e la richiesta di derivabilità reale. Mentre è ben noto che l'esistenza (ed anche l'eventuale continuità) della derivata reale di una funzione non ha alcuna conseguenza sull'esistenza della derivata seconda, in campo complesso stiamo affermando che l'esistenza della derivata prima implica l'esistenza (e quindi la continuità) di *tutte* le derivate di ordine superiore, anzi addirittura la sviluppabilità in serie di potenze. Tale affermazione è solo apparentemente paradossale, perché, come abbiamo già osservato, la richiesta di derivabilità complessa traduce una proprietà molto stringente delle funzioni, cioè il fatto che parte reale ed immaginaria sono soluzioni di un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali ed in particolare sono *funzioni armoniche*. È da qui che segue la regolarità analitica.

Se Ω è un sottoinsieme aperto di \mathbb{C} , si denoterà con $\mathcal{H}(\Omega)$ l'insieme delle funzioni olomorfe definite in Ω .

Si può enunciare subito il seguente risultato preliminare.

Lemma 6.5.2 *Siano Ω un sottoinsieme aperto di \mathbb{C} ed $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ e si ponga $f = F'$. Supponiamo che f sia continua. Se $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ è un cammino tale che $\varphi^* \subset \Omega$, allora*

$$\int_{\varphi} f(z) dz = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)).$$

DIM. Risulta

$$\int_{\varphi} f(z) dz = \int_a^b F'(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int_a^b (F \circ \varphi)'(t) dt = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)).$$

□

In particolare, se φ è un circuito, allora l'integrale di f lungo φ risulta nullo. Questo risultato sarà dimostrato in seguito anche in ipotesi più generali.

A questo punto è utile richiamare la definizione di insieme stellato (vedi anche 1.1.21). Se Ω è un sottoinsieme aperto di \mathbb{C} , si dice che Ω è stellato rispetto ad un punto $z_0 \in \Omega$ se verifica la seguente condizione

$$\forall z \in \Omega, \forall t \in [0, 1] : z_0 + t(z - z_0) \in \Omega, \quad (6.5.11)$$

cioè per ogni $z \in \Omega$ il segmento di estremi z_0 e z è interamente contenuto in Ω . Un sottoinsieme aperto Ω di \mathbb{C} si dice stellato se è stellato almeno rispetto ad un suo punto.

Teorema 6.5.3 (Teorema di Cauchy) *Siano Ω un sottoinsieme aperto stellato di \mathbb{C} , $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ e $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ un circuito tale che $\varphi^* \subset \Omega$. Allora*

$$\oint_{\varphi} f(z) dz = 0.$$

DIM. Per semplicità, in questa dimostrazione supponiamo che la derivata della funzione olomorfa f sia una funzione continua (con una dimostrazione più complessa si può fare a meno di questa ipotesi aggiuntiva). Posto come al solito $f = u + iv$ e $\varphi = x + iy$, si ha

$$\begin{aligned} \oint_{\varphi} f(z) dz &= \int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \\ &= \int_a^b (u(\varphi(t)) + iv(\varphi(t))) \cdot (x'(t) + iy'(t)) dt \\ &= \int_a^b (u(\varphi(t))x'(t) - v(\varphi(t))y'(t)) dt \\ &\quad + i \int_a^b (v(\varphi(t))x'(t) + u(\varphi(t))y'(t)) dt \end{aligned}$$

e quindi, considerati i campi vettoriali $F := (u, -v)$ e $G := (v, u)$, si può scrivere (identificando φ con una curva in \mathbb{R}^2)

$$\oint_{\varphi} f(z) dz = \oint_{\varphi} F \cdot d\ell + i \oint_{\varphi} G \cdot d\ell.$$

Dalle equazioni di Cauchy-Riemann (6.2.2) deriva subito che i campi F e G (di classe C^1) sono irrotazionali e poiché Ω è un insieme aperto stellato, essi sono conservativi (vedi Osservazione 3.3.11). Poiché l'integrale viene effettuato lungo una curva chiusa, si deve avere $\oint_{\varphi} F \cdot d\ell = 0$ e $\oint_{\varphi} G \cdot d\ell = 0$, da cui anche $\oint_{\varphi} f(z) dz = 0$. \square

Più in generale, dal Teorema 3.3.8 segue il seguente risultato.

Teorema 6.5.4 (Teorema di Cauchy sui circuiti omotopi) *Sia Ω un sottoinsieme aperto di \mathbb{C} e sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa. Se $\varphi_0 : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ e $\varphi_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ sono due circuiti Ω -omotopi, allora*

$$\oint_{\varphi_0} f(z) dz = \oint_{\varphi_1} f(z) dz.$$

In particolare, se $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ è un circuito Ω -omotopo ad un punto di Ω , allora

$$\oint_{\varphi} f(z) dz = 0.$$

Teorema 6.5.5 (Formula di Cauchy) *Siano Ω un sottoinsieme aperto stellato di \mathbb{C} , $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ e $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ un cammino semplice e chiuso tale che $\varphi^* \subset \Omega$. Allora $\Omega_\varphi \subset \Omega$ e inoltre, per ogni $z_0 \in \Omega_\varphi$,*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\varphi} \frac{f(z)}{z - z_0} dz. \quad (6.5.12)$$

DIM. Si dimostra la tesi nel caso particolare in cui φ sia la circonferenza di centro z_0 e raggio $r > 0$, supponendo che $\bar{B}_r(z_0) \subset \Omega$. Si consideri la funzione $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ definita ponendo, per ogni $z \in \Omega$,

$$g(z) := \begin{cases} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} & \text{se } z \neq z_0 \\ f'(z_0) & \text{se } z = z_0. \end{cases}$$

Si verifica facilmente che g è continua in Ω (in quanto f è derivabile in z_0) ed olomorfa in $\Omega \setminus \{z_0\}$ (in quanto rapporto di funzioni olomorfe). Si può dimostrare inoltre che alla funzione g può essere applicato il Teorema di Cauchy 6.5.3 il quale, tenendo presente che $\oint_{\varphi} \frac{1}{z - z_0} dz = 2\pi i$ (come nell'esempio 6.4.1), fornisce

$$0 = \oint_{\varphi} g(z) dz = \oint_{\varphi} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - \oint_{\varphi} \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz = \oint_{\varphi} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - 2\pi i f(z_0)$$

da cui la tesi. \square

Si può a questo punto dimostrare che le funzioni olomorfe sono analitiche.

Teorema 6.5.6 (Analiticità delle funzioni olomorfe) *Siano Ω un sottoinsieme aperto di \mathbb{C} ed $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa. Allora f è analitica e inoltre, se $z_0 \in \Omega$ e se $r > 0$ è tale che $\bar{B}_r(z_0) \subset \Omega$, si ha, per ogni $z \in B_r(z_0)$,*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_{z_0, r}} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{k+1}} d\xi \right) (z - z_0)^k. \quad (6.5.13)$$

DIM. Infatti, per ogni $z \in B_r(z_0)$, si ha

$$\begin{aligned}
 f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_{z_0, r}} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_{z_0, r}} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0 - (z - z_0)} d\xi \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_{z_0, r}} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0) \left(1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right)} d\xi \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_{z_0, r}} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right)^k d\xi \\
 &= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_{z_0, r}} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{k+1}} d\xi \right) (z - z_0)^k,
 \end{aligned}$$

dove si è usato il fatto che $\left| \frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right| < 1$ per $\xi \in \gamma_{z_0, r}^*$ perciò la serie converge uniformemente e si può integrare per serie. □ QED

Osservazione 6.5.7 Dai Teoremi 6.5.1 e 6.5.6 segue che una funzione risulta olomorfa se e solo se essa è analitica. Inoltre, dagli stessi teoremi segue anche che se f è olomorfa, anche f' è olomorfa. Conseguentemente, f è dotata delle derivate di ogni ordine e, posto $f = u + iv$, risulta $u, v \in C^\infty(\Omega)$, e ciò giustifica pienamente anche quanto affermato nell'Osservazione 6.2.6. Si conclude pertanto che u e v sono armoniche.

Per stabilire che una funzione è olomorfa, può essere talvolta utile il seguente risultato.

Teorema 6.5.8 (Teorema di Morera) *Siano Ω un sottoinsieme aperto di \mathbb{C} ed $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione continua. Si supponga che, per ogni triangolo $T \subset \Omega$, risulti*

$$\oint_{\partial T} f(z) dz = 0.$$

Allora f è olomorfa.

Studiamo ora ulteriori conseguenze dell'analiticità delle funzioni olomorfe.

Corollario 6.5.9 *Siano Ω un sottoinsieme aperto di \mathbb{C} ed $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa. Se $z_0 \in \Omega$, allora f è derivabile infinite volte in z_0 e, per ogni $k \in \mathbb{N}$, si ha*

$$f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \oint_{\gamma_{z_0, r}} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz \quad (6.5.14)$$

dove $r > 0$ è un arbitrario numero strettamente positivo tale che $\bar{B}_r(z_0) \subset \Omega$.

DIM. Poiché f è olomorfa e quindi è sviluppabile localmente in serie di potenze, il coefficiente k -esimo della serie (6.5.13) coincide con $\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$ e da ciò segue direttamente la (6.5.14). □ QED

Corollario 6.5.10 (Diseguaglianza di Cauchy) *Siano Ω un sottoinsieme aperto di \mathbb{C} ed $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa. Se $z_0 \in \Omega$ e se $r > 0$ è tale che $\bar{B}_r(z_0) \subset \Omega$, allora, per ogni $k \in \mathbb{N}$, si ha:*

$$|f^{(k)}(z_0)| \leq \frac{k!}{r^k} \max_{z \in \gamma_{z_0, r}^*} |f(z)| \quad (6.5.15)$$

DIM. Poniamo per brevità $M := \max_{z \in \gamma_{z_0, r}^*} |f(z)|$. Utilizzando la proprietà (6.4.8) ed il Corollario 6.5.9 e tenendo presente che, per ogni $z \in \gamma_{z_0, r}^*$ risulta $|f(z)/(z - z_0)^{k+1}| \leq M/r^{k+1}$, si ha

$$|f^{(k)}(z_0)| \leq \frac{k!}{2\pi} \frac{M}{r^{k+1}} \ell(\gamma_{z_0, r}) = \frac{k!}{2\pi} \frac{M}{r^{k+1}} 2\pi r = \frac{k!}{r^k} M.$$

□

Teorema 6.5.11 (Teorema di Liouville) *Sia $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa e limitata. Allora f è costante.*

DIM. Poiché f è limitata, esiste una costante $M > 0$ tale che $|f(z)| \leq M$ per ogni $z \in \mathbb{C}$. Fissiamo $z_0 \in \mathbb{C}$; allora, dalla diseguaglianza di Cauchy (6.5.15) applicata per $k = 1$, si ottiene

$$|f'(z_0)| \leq \frac{1}{r} \max_{z \in \gamma_{z_0, r}^*} |f(z)| \leq \frac{M}{r},$$

ed essendo $r > 0$ arbitrario ciò comporta $f'(z_0) = 0$, dall'arbitrarietà di z_0 , segue $f' = 0$ e quindi f è costante. □

Dal Teorema 6.5.11 si ottiene facilmente il seguente Teorema.

Teorema 6.5.12 (Teorema fondamentale dell'algebra) *Sia $P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ un polinomio di grado $n \geq 1$. Allora P ammette almeno uno zero (cioè esiste $z_0 \in \mathbb{C}$ tale che $P(z_0) = 0$).*

DIM. Supponiamo, per assurdo, che P non si annulli in alcun elemento di \mathbb{C} , allora la funzione reciproca $f = 1/P$ risulta olomorfa in tutto \mathbb{C} in quanto rapporto di funzioni olomorfe. Verifichiamo ora che f è limitata. Infatti, considerati $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ con $a_n \neq 0$ e tali che $P(z) = a_0 + \dots + a_n z^n$ risulta $\lim_{z \rightarrow \infty} |P(z)| = \infty$ (infatti $\lim_{z \rightarrow \infty} |P(z)/(a_n z^n)| = 1$ e $\lim_{z \rightarrow \infty} |a_n z^n| = \infty$ in quanto $n \geq 1$). Pertanto $\lim_{z \rightarrow \infty} |f(z)| = \lim_{z \rightarrow \infty} |1/P(z)| = 0$. Applicando la definizione di limite, si può trovare una sfera $B_R(0)$ tale che $|f| \leq 1$ in $\mathbb{C} \setminus B_R(0)$, inoltre f è limitata in $\bar{B}_R(0)$ per il teorema di Weierstrass 6.1.11 e quindi f è limitata in tutto \mathbb{C} . Dal Teorema di Liouville segue che f deve essere costante e ciò è assurdo in quanto P è un polinomio di grado $n \geq 1$. □

Dal teorema fondamentale dell'algebra segue che un polinomio di grado $n \geq 1$ ammette esattamente n zeri, infatti, basta reiterare l'applicazione del Teorema 6.5.12 tenendo presente che se z_0 è uno zero di un polinomio P di grado $n \geq 1$, allora P si scompone nella forma $P(z) = (z - z_0)P_1(z)$ con P_1 polinomio di grado $n - 1$.

6.6 Zeri di una funzione olomorfa

Siano Ω un sottoinsieme aperto di \mathbb{C} ed $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione complessa. Si denomina zero di f ogni elemento $z_0 \in \Omega$ tale che $f(z_0) = 0$. L'insieme degli zeri di f si denota con $\mathcal{Z}(f)$.

Gli zeri delle funzioni olomorfe hanno alcune proprietà particolari di seguito descritte. Si considera dapprima il caso in cui f sia sviluppabile in serie di potenze.

Proposizione 6.6.1 *Si consideri una funzione sviluppabile in serie di potenze*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k (z - z_0)^k \quad (6.6.16)$$

in $B_r(z_0)$. Allora z_0 è di accumulazione per $\mathcal{Z}(f)$ se e solo se f è identicamente nulla in $B_r(z_0)$ (cioè $c_k = 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$).

DIM. Se f è identicamente nulla, ovviamente z_0 è di accumulazione per $\mathcal{Z}(f)$. Viceversa, si supponga che f non sia identicamente nulla, per cui l'insieme $A := \{k \in \mathbb{N} : c_k \neq 0\}$ è non vuoto e si denoti con m il suo più piccolo elemento. Se $m = 0$ allora $f(z_0) = c_0 \neq 0$ e quindi, poiché f è continua, esiste un intorno di z_0 in cui f non assume mai il valore 0, pertanto in questo caso z_0 non è di accumulazione per $\mathcal{Z}(f)$. Si supponga ora $m \geq 1$, allora la funzione f può essere scritta nella forma

$$f(z) = (z - z_0)^m \sum_{k=m}^{+\infty} c_k (z - z_0)^{k-m}.$$

Si consideri la funzione

$$g(z) := \sum_{k=m}^{+\infty} c_k (z - z_0)^{k-m},$$

si ha $g(z_0) = c_m \neq 0$ e poiché anche g è continua, essa non si annulla mai in un opportuno intorno $B_{r_1}(z_0)$; inoltre $(z - z_0)^m$ si annulla solamente in z_0 e pertanto $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$ in $B_{r_1}(z_0)$ si annulla solamente in z_0 ; segue che in questo caso z_0 è un punto isolato di $\mathcal{Z}(f)$. \square

Dalla proposizione precedente segue che per una funzione non identicamente nulla del tipo (6.6.16) che si annulla in z_0 , si ha che z_0 è un punto isolato di $\mathcal{Z}(f)$. Dal caso semplice delle serie di potenze si deduce il seguente risultato generale riguardante le funzioni olomorfe.

Teorema 6.6.2 (Teorema sull'annullamento delle funzioni olomorfe) *Siano Ω un sottoinsieme aperto connesso di \mathbb{C} e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa. Allora le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

- a) *L'insieme $\mathcal{Z}(f)$ è dotato di punti di accumulazione in Ω ;*

b) f è identicamente nulla.

Alcune conseguenze del Teorema 6.6.2 vengono fornite dai seguenti corollari.

Corollario 6.6.3 *Siano Ω un sottoinsieme aperto connesso di \mathbb{C} e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa. Allora le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

- a) *Esiste un punto $z_0 \in \Omega$ tale che, per ogni $k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)}(z_0) = 0$;*
- b) *f è identicamente nulla.*

Corollario 6.6.4 *Siano Ω un sottoinsieme aperto di \mathbb{C} e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa non identicamente nulla. Se $z_0 \in \Omega$ e $f(z_0) = 0$ allora esiste un unico numero naturale $m \geq 1$ tale che*

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{(z - z_0)^m} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Pertanto, gli zeri di una funzione olomorfa non identicamente nulla sono isolati ed hanno ordine intero.

Corollario 6.6.5 (Estensione dell'annullamento) *Siano Ω un sottoinsieme aperto connesso di \mathbb{C} tale che $\Omega \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$ e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa. Se f si annulla in $\Omega \cap \mathbb{R}$, allora f è identicamente nulla in tutto Ω .*

L'ultimo corollario può essere utilizzato per dimostrare che alcune uguaglianze valide in \mathbb{R} possono essere estese anche all'insieme \mathbb{C} . Ad esempio, si consideri l'uguaglianza $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ valida per ogni $x \in \mathbb{R}$. La funzione $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definita ponendo, per ogni $z \in \mathbb{C}$, $f(z) := \sin^2 z + \cos^2 z - 1$ è olomorfa e si annulla in \mathbb{R} ; dal Corollario 6.6.5, deve essere $f = 0$ in tutto \mathbb{C} e quindi si conclude che $\forall z \in \mathbb{C} : \sin^2 z + \cos^2 z = 1$.

Il Corollario 6.6.5 può essere enunciato anche dicendo che se $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ sono due funzioni olomorfe in un insieme aperto connesso Ω tale che $\Omega \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$ e se $f = g$ in $\Omega \cap \mathbb{R}$, allora $f = g$ in Ω . Infatti, basta applicare il Corollario 6.6.5 alla funzione $f - g$.

Da tale ultima proprietà si deduce l'unicità del prolungamento olomorfo di una funzione reale derivabile in un sottoinsieme di \mathbb{R} . Se Ω è un sottoinsieme aperto connesso di \mathbb{C} e se $f : \Omega \cap \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione reale derivabile, da quanto sopra si deduce che può esistere al più un unico prolungamento olomorfo $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ di f .

6.7 Serie di Laurent in una corona e singolarità

In questa sezione ci occupiamo dello sviluppo in serie di una funzione che presenta delle singolarità isolate.

Se $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ è una funzione definita in un sottoinsieme aperto Ω di \mathbb{C} , si dice che un punto $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ è di singolarità isolata per f se $B_r(z_0) \setminus \{z_0\} \subset \Omega$ ed f è olomorfa in $B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$, per un opportuno $r > 0$.

Nel seguito denoteremo con $S(z_0; r, R)$ la corona circolare aperta di centro z_0 e raggi $0 < r < R$:

$$S(z_0; r, R) := \{ z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R \}, \quad (6.7.17)$$

analogamente, la corona circolare chiusa di centro z_0 e raggi r e R si definisce come segue

$$\bar{S}(z_0; r, R) := \{ z \in \mathbb{C} : r \leq |z - z_0| \leq R \}, \quad (6.7.18)$$

Segue ora il risultato più importante riguardante lo sviluppo in serie di Laurent di una funzione.

Teorema 6.7.1 (Teorema sulla serie di Laurent in una corona circolare)

Siano Ω un sottoinsieme aperto di \mathbb{C} , $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa e si supponga che $\bar{S}(z_0; r, R) \subset \Omega$. Allora esistono una ed una sola successione $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ed una ed una sola successione $(d_k)_{k \geq 1}$ tali che, per ogni $z \in S(z_0; r, R)$, risulta

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k (z - z_0)^k + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{d_k}{(z - z_0)^k} \quad (6.7.19)$$

e inoltre

$$\begin{cases} c_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_{z_0, \varrho}} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{k+1}} d\xi & \forall k \in \mathbb{N} \\ d_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_{z_0, \varrho}} f(\xi) (\xi - z_0)^{k-1} d\xi & \forall k \geq 1 \end{cases} \quad (6.7.20)$$

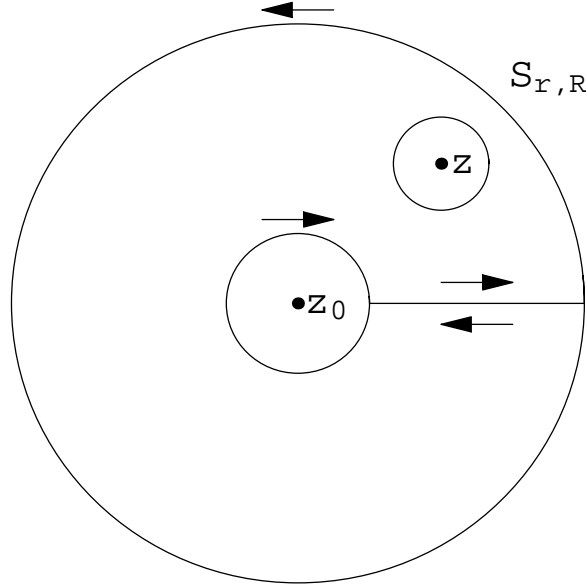
con $r \leq \varrho \leq R$ arbitrario.

DIM. Sia $\varepsilon > 0$ tale che $\bar{B}_\varepsilon(z) \subset S(z_0; r, R)$. Allora per il Teorema sulla formula di Cauchy 6.5.5

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_{z, \varepsilon}} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi.$$

Ma $\gamma_{z, \varepsilon}$ è $\Omega \setminus \{z\}$ -omotopo al circuito φ rappresentato in Figura – 6.2 costituito da $\gamma_{z_0, R}$, da $-\gamma_{z_0, r}$ e dal segmento percorso una volta in un verso ed una volta nel verso opposto. Pertanto dal Teorema 6.5.4, poiché i tratti rettilinei si elidono, risulta:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_{z_0, R}} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_{z_0, r}} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi.$$

Figura – 6.2: Due cammini $\Omega \setminus \{z\}$ -omotopi.

Il primo integrale si tratta come nel Teorema 6.5.6 e fornisce la prima serie di (6.7.19). Per il secondo integrale si ha:

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_{z_0,r}} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi &= -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_{z_0,r}} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0 - (z - z_0)} d\xi \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_{z_0,r}} \frac{f(\xi)}{(z - z_0) \left(1 - \frac{\xi - z_0}{z - z_0}\right)} d\xi \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_{z_0,r}} \frac{f(\xi)}{z - z_0} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{\xi - z_0}{z - z_0}\right)^k d\xi \\
 &= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_{z_0,r}} f(\xi) (\xi - z_0)^{k-1} d\xi \right) \frac{1}{(z - z_0)^k},
 \end{aligned}$$

dove si è usato il fatto che $\left| \frac{\xi - z_0}{z - z_0} \right| < 1$ per $\xi \in \gamma_{z_0,r}^*$ perciò la serie converge uniformemente e si può integrare per serie. Sommando i due sviluppi si ha la tesi (6.7.19). Per l'invarianza per omotopia i coefficienti si possono calcolare su qualunque circonferenza $\gamma_{z_0,\varrho}$ con $r \leq \varrho \leq R$. □ QED

Esempio 6.7.2

Consideriamo la funzione $f(z) = \frac{1}{1-z} + \frac{1}{2-z}$ definita in $\mathbb{C} \setminus \{1, 2\}$. Allora è possibile sviluppare in serie f in $B_1(0)$, in $S(0; 1, 2)$ e in $S(0; 2, +\infty)$. In $B_1(0)$ la funzione è

olomorfa e otteniamo:

$$f(z) = \frac{1}{1-z} + \frac{1}{2} \frac{1}{1-z/2} = \sum_{k=0}^{+\infty} z^k + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{2^{k+1}}\right) z^k.$$

Nella corona $S(0; 1, 2)$ otteniamo:

$$f(z) = -\frac{1}{z} \frac{1}{1-1/z} + \frac{1}{2} \frac{1}{1-z/2} = -\frac{1}{z} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{z^k} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^k = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{-1}{z^k} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{k+1}} z^k.$$

Infine nella corona $S(0; 2, +\infty)$ risulta:

$$f(z) = -\frac{1}{z} \frac{1}{1-1/z} - \frac{1}{z} \frac{1}{1-2/z} = -\frac{1}{z} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{z^k} - \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^k = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1 - 2^{k-1}) \frac{1}{z^k}.$$

Teorema 6.7.3 (Teorema sulla serie di Laurent in un punto singolare)

Siano Ω un sottoinsieme aperto di \mathbb{C} , $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa e $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ un punto di singolarità isolato per f . Allora esiste $R > 0$ tale che, per ogni $z \in B_R(z_0) \setminus \{z_0\}$,

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k (z - z_0)^k + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{d_k}{(z - z_0)^k}, \quad (6.7.21)$$

dove i coefficienti c_k e d_k sono dati dalla (6.7.20).

La prima serie ha raggio di convergenza $\rho \geq R$, mentre la seconda ha raggio di convergenza infinito. Inoltre la convergenza di entrambe le serie è totale in ogni corona circolare con raggi positivi strettamente minori di R .

DIM. Si applica il teorema precedente in una corona circolare $S(z_0; r, R)$ con $0 < r < R$ arbitrario e poi si considera $r \rightarrow 0$. QED

La serie $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k (z - z_0)^k$ si denomina *parte regolare di f* , mentre la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{d_k}{(z - z_0)^k}$ si denomina *parte singolare oppure parte caratteristica di f* .

La parte caratteristica consente di formulare la seguente classificazione dei punti singolari isolati.

Fissiamo Ω un sottoinsieme aperto di \mathbb{C} , $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa e $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ un punto di singolarità isolato per f . Consideriamo $R > 0$ tale che, per ogni $z \in B_R(z_0) \setminus \{z_0\}$ valga (6.7.21). Poniamo le seguenti definizioni:

1. Il punto z_0 si dice di *singolarità eliminabile per f* se $d_k = 0$ per ogni $k \geq 1$. In tal caso, per ogni $z \in B_R(z_0) \setminus \{z_0\}$, risulta

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k (z - z_0)^k$$

ed inoltre f ammette un prolungamento olomorfo considerando la funzione che in z_0 assume il valore c_0 .

2. Il punto z_0 si dice *polo di ordine* $n \geq 1$ per f se $d_n \neq 0$ ed inoltre $d_k = 0$ per ogni $k > n$. In questo caso la parte singolare è costituita da un numero finito di addendi.
3. Il punto z_0 si dice di *singolarità essenziale* per f se $d_k \neq 0$ per infiniti $k \geq 1$.

Si hanno le seguenti caratterizzazioni delle singolarità.

Teorema 6.7.4 (Caratterizzazione delle singolarità eliminabili)

Siano Ω un sottoinsieme aperto di \mathbb{C} , $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa e $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ un punto di singolarità isolato per f . Allora le seguenti proposizioni sono equivalenti:

- a) z_0 è un punto di singolarità eliminabile per f ,
- b) f ammette un prolungamento olomorfo in $\Omega \cup \{z_0\}$,
- c) f è limitata in un intorno di z_0 .

Osservazione 6.7.5 Sia Ω un sottoinsieme aperto di \mathbb{C} , $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ tale che $B_r(z_0) \setminus \{z_0\} \subset \Omega$ per un opportuno $r > 0$ ed $f : \Omega \cup \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa in Ω e continua in z_0 . Allora f è derivabile anche in z_0 . Infatti, dalla continuità di f in z_0 si deduce che f è limitata in un intorno di z_0 e quindi, per la caratterizzazione precedente, $f|_{\Omega}$ ammette un prolungamento olomorfo in $\Omega \cup \{z_0\}$.

Teorema 6.7.6 (Caratterizzazione dei poli di ordine n)

Siano Ω un sottoinsieme aperto di \mathbb{C} , $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa e $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ un punto di singolarità isolato per f . Allora le seguenti proposizioni sono equivalenti:

- a) z_0 è un polo di ordine n per f ,
- b) esiste $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^n f(z) = \ell \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$,
- c) esiste una funzione olomorfa $g : \Omega \cup \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ tale che

$$g(z_0) \neq 0, \quad \forall z \in \Omega : f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^n}$$

In qualche caso può essere anche utile la seguente caratterizzazione dei poli indipendentemente dall'ordine. Per dimostrarla bisogna tener presente che un polo di ordine n per f è uno zero di ordine n per $1/f$ ed il Corollario 6.6.4.

Teorema 6.7.7 (Caratterizzazione dei poli indipendente dall'ordine)

Siano Ω un sottoinsieme aperto di \mathbb{C} , $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa e $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ un punto di singolarità isolato per f . Allora le seguenti proposizioni sono equivalenti:

- a) z_0 è un polo per f ,
- b) esiste $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = +\infty$.

Infine vale il seguente teorema.

Teorema 6.7.8 (Caratterizzazione delle singolarità essenziali)

Siano Ω un sottoinsieme aperto di \mathbb{C} , $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa e $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ un punto di singolarità isolato per f . Allora le seguenti proposizioni sono equivalenti:

- a) z_0 è un punto di singolarità essenziale per f ,
- b) per ogni $r > 0$, risulta $\overline{f(\Omega \cap B_r(z_0))} = \mathbb{C}$,
- c) non esiste $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)|$.

Esercizio 6.7.9 Classificare l'origine come singolarità per le seguenti funzioni:

$$\frac{\sin z}{z^3}, \quad \frac{1 - e^{-z}}{z}, \quad \frac{e^{-1/z^2}}{z}, \quad z^3 \sin \frac{1}{z}.$$

6.8 Il Teorema dei residui

Se $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ è una funzione olomorfa e $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ è un punto di singolarità isolata per f , il coefficiente d_1 dello sviluppo in serie di Laurent (6.7.21) si dice *residuo di f in z_0* e si denota con $\text{Res}(f, z_0)$. Dalle caratterizzazioni delle singolarità ottenute nella sezione precedente, si ottengono le seguenti proprietà dei residui.

1. Se z_0 è un punto di singolarità eliminabile per f , allora $\text{Res}(f, z_0) = 0$.
2. Se z_0 è un polo del primo ordine per f , allora

$$\text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z).$$

3. Se z_0 è un polo del primo ordine per f , allora

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{\left(\frac{1}{f}\right)'(z_0)}.$$

4. Se z_0 è un polo di ordine $n > 1$ per f , allora

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} ((z - z_0)^n f(z)).$$

5. Nel calcolo dei residui è spesso utile la Regola di de L'Hôpital: se f e g hanno entrambe uno zero oppure entrambe un polo in z_0 , allora

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

6. Se f è olomorfa in z_0 e se g ha uno zero del primo ordine in z_0 , allora

$$\text{Res}\left(\frac{f}{g}, z_0\right) = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}.$$

Il risultato principale della presente sezione è il seguente teorema.

Teorema 6.8.1 (Teorema dei residui)

Siano Ω un sottoinsieme aperto di \mathbb{C} , $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ un circuito tale che $\Omega_\varphi \subset \Omega$, S un sottoinsieme finito di Ω_φ ed $f : \Omega \setminus S \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa per la quale gli elementi di S siano punti di singolarità isolata. Allora

$$\oint_{\varphi} f(z) dz = 2\pi i \sum_{z \in S} \text{Res}(f, z). \quad (6.8.22)$$

Il Teorema dei Residui si giustifica tenendo conto che, in base all'esempio 6.4.1, l'integrale su un circuito dello sviluppo di Laurent in $z \in S$ fornisce tutti termini nulli tranne l'integrale di $\frac{1}{z}$ che dà $2\pi i \text{Res}(f, z)$.

Si consideri una funzione $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa nell'insieme aperto Ω e si supponga che esista $r > 0$ tale che $\mathbb{C} \setminus \bar{B}_r(0) \subset \Omega$ (cioè, f è definita al di fuori di un insieme chiuso e limitato); tale condizione viene espressa dicendo che il punto ∞ è una singolarità isolata per f . Come nel caso dei punti singolari isolati in \mathbb{C} , anche ora si può dimostrare che vale uno sviluppo in serie di Laurent in un intorno del punto ∞ .

Precisamente, esistono un'unica successione $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ed un'unica successione $(d_k)_{k \geq 1}$ di numeri complessi tali che, per ogni $z \in \mathbb{C} \setminus \bar{B}_r(0)$,

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{c_k}{z^k} + \sum_{k=1}^{+\infty} d_k z^k. \quad (6.8.23)$$

Il residuo di f nel punto ∞ viene definito come segue:

$$\text{Res}(f, \infty) := -c_1.$$

La definizione precedente è giustificata dal fatto che la funzione

$$g(z) := -\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right)$$

è definita ed olomorfa in $B_{1/r}(0) \setminus \{0\}$, ha nel punto 0 una singolarità isolata ed inoltre

$$\operatorname{Res}(f, \infty) = \operatorname{Res}(g, 0).$$

Una proprietà interessante è che se S è un sottoinsieme finito di \mathbb{C} e se $f : \mathbb{C} \setminus S \rightarrow \mathbb{C}$ è una funzione olomorfa che ha delle singolarità isolate nei punti di S , allora

$$\sum_{z \in S} \operatorname{Res}(f, z) + \operatorname{Res}(f, \infty) = 0.$$

La singolarità nel punto all'infinito può essere classificata allo stesso modo delle singolarità in elementi di \mathbb{C} . Precisamente, si dice che

1. Il punto ∞ è una singolarità eliminabile per f se, per ogni $k \geq 1$, risulta $d_k = 0$.
2. Il punto ∞ è un polo di ordine n per f (con $n \geq 1$) se $d_n \neq 0$ e, per ogni $k > n$, risulta $d_k = 0$.
3. Il punto ∞ è una singolarità essenziale per f se, per infiniti $k \geq 1$, risulta $d_k \neq 0$.

6.9 I Teoremi di Jordan

Enunciano ora alcuni teoremi di Jordan che vengono sistematicamente utilizzati nelle applicazioni riguardanti il calcolo di integrali. Intenderemo fissato un cammino il cui sostegno è un arco di un semicerchio; pertanto, consideriamo $t_0, t_1 \in [0, \pi]$ con $t_0 < t_1$, $z_0 \in \mathbb{C}$ ed $R > 0$ e definiamo la curva $\gamma_R : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{C}$ ponendo, per ogni $t \in [t_0, t_1]$, $\gamma_R(t) = z_0 + R e^{it}$.

Teorema 6.9.1 (Teorema del grande cerchio di Jordan) *Sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa nell'insieme aperto Ω e supponiamo che, per ogni $r \geq R$ e per ogni $t \in [t_0, t_1]$, si abbia $z_0 + r e^{it} \in \Omega$. Allora*

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} (z - z_0) f(z) = \ell \in \mathbb{C} \implies \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_R} f(z) dz = i \ell (t_1 - t_0).$$

Teorema 6.9.2 (Teorema del piccolo cerchio di Jordan) *Sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa nell'insieme aperto Ω e si supponga che, per ogni $0 < r \leq R$ e per ogni $t \in [t_0, t_1]$, si abbia $z_0 + r e^{it} \in \Omega$. Allora*

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) = \ell \in \mathbb{C} \implies \lim_{R \rightarrow 0} \int_{\gamma_R} f(z) dz = i \ell (t_1 - t_0).$$

Osserviamo che se f ha un polo del primo ordine in z_0 risulta $d_1 = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z)$ e quindi

$$\lim_{R \rightarrow 0} \int_{\gamma_R} f(z) dz = i (t_1 - t_0) \operatorname{Res}(f, z_0).$$

Teorema 6.9.3 (Lemma di Jordan) *Sia $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa nell'insieme aperto Ω e si supponga che, per ogni $r \geq R$ e per ogni $t \in [t_0, t_1]$, si abbia $z_0 + r e^{it} \in \Omega$. Allora*

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} g(z) = 0 \implies \forall \alpha > 0 : \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_R} e^{i\alpha z} g(z) dz = 0.$$

Nel Teorema precedente, se $\alpha < 0$ si considerano archi di circonferenza nel semipiano delle parti immaginarie negative, cioè $t_0, t_1 \in [\pi, 2\pi]$.

Analogamente i Teoremi 6.9.1 e 6.9.2 valgono anche nel caso $t_0, t_1 \in [\pi, 2\pi]$.

6.10 Applicazioni al calcolo di integrali

Consideriamo ora alcune applicazioni dei risultati precedenti.

Esempio 6.10.1 Si vuole calcolare il seguente integrale improprio

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + 2)^2} dx.$$

Osserviamo innanzitutto che la funzione $u(x) := 1/(x^2 + 2)^2$ è integrabile in \mathbb{R} in quanto è definita e continua in \mathbb{R} e nei punti $\pm\infty$ è un infinitesimo di ordine 4.

Si consideri ora la funzione complessa $f : \mathbb{C} \setminus \{\pm i\sqrt{2}\} \rightarrow \mathbb{C}$ definita ponendo, per ogni $z \in \mathbb{C} \setminus \{\pm i\sqrt{2}\}$,

$$f(z) := \frac{1}{(z^2 + 2)^2}.$$

I punti singolari sono $\{\pm i\sqrt{2}\}$. Fissiamo $R > \sqrt{2}$ e consideriamo il circuito φ_R costituito dai due cammini $\gamma_{1,R} : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ e $\gamma_{2,R} : [-R, R] \rightarrow \mathbb{C}$ definiti ponendo

$$\gamma_{1,R}(t) := R e^{it}, \quad t \in [0, \pi]; \quad \gamma_{2,R}(t) := t, \quad t \in [-R, R].$$

Si osservi che il circuito viene percorso in senso antiorario (vedi Figura 6.3). Dal teorema dei residui segue

$$\oint_{\varphi_R} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, i\sqrt{2})$$

(infatti, il circuito considerato contiene al suo interno solamente il punto $i\sqrt{2}$) e inoltre, tenendo presente che $i\sqrt{2}$ è un polo del secondo ordine, si ha

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f, i\sqrt{2}) &= \lim_{z \rightarrow i\sqrt{2}} \frac{d}{dz} \left((z - i\sqrt{2})^2 f(z) \right) = \lim_{z \rightarrow i\sqrt{2}} \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{(z + i\sqrt{2})^2} \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow i\sqrt{2}} -\frac{2}{(z + i\sqrt{2})^3} = -i \frac{\sqrt{2}}{16}. \end{aligned}$$

Allora, esplicitando gli integrali sui cammini $\gamma_{1,R}$, $\gamma_{2,R}$

$$\int_{\gamma_{1,R}} f(z) dz + \int_{-R}^R \frac{1}{(t^2 + 2)^2} dt = 2\pi i \left(-i \frac{\sqrt{2}}{16} \right) = \frac{\sqrt{2}}{8} \pi.$$

Poiché $\lim_{z \rightarrow \infty} z f(z) = 0$, dal teorema di Jordan sul grande cerchio segue anche $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_{1,R}} f(z) dz = 0$, e quindi, passando al limite per $R \rightarrow +\infty$, si ottiene

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + 2)^2} dx = \frac{\sqrt{2}}{8} \pi.$$

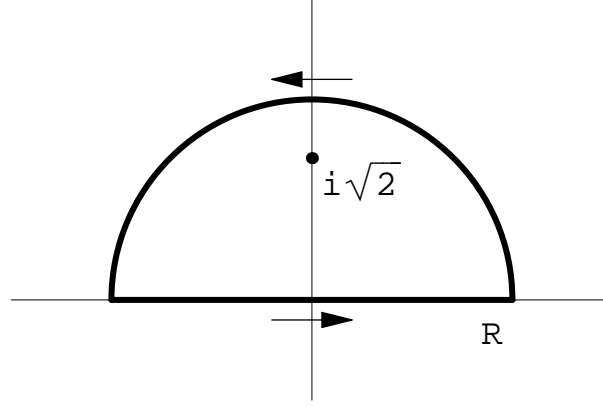


Figura – 6.3: Circuito relativo all'Esempio 6.10.1.

Esempio 6.10.2 Calcoliamo il seguente integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 4} dx.$$

Osserviamo innanzitutto che la funzione $u(x) := \cos x / (x^2 + 4)$ è integrabile in $[0, +\infty)$ in quanto è definita e continua in $[0, +\infty)$ e nel punto $+\infty$ è un infinitesimo di ordine 2 e che, essendo pari, l'integrale considerato è la metà dell'integrale su tutto \mathbb{R} .

Consideriamo ora la funzione complessa $f : \mathbb{C} \setminus \{\pm 2i\} \rightarrow \mathbb{C}$ definita ponendo, per ogni $z \in \mathbb{C} \setminus \{\pm 2i\}$,

$$f(z) := \frac{e^{iz}}{z^2 + 4}.$$

I punti singolari sono $\{\pm 2i\}$. Fissiamo $R > 2$ e consideriamo il circuito φ_R costituito dai due cammini $\gamma_{1,R} : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ e $\gamma_{2,R} : [-R, R] \rightarrow \mathbb{C}$ definiti ponendo

$$\gamma_{1,R}(t) := R e^{it}, \quad t \in [0, \pi]; \quad \gamma_{2,R}(t) := t, \quad t \in [-R, R].$$

Si osservi che il circuito viene percorso in senso antiorario (vedi Figura – 6.4). Dal teorema dei residui segue

$$\oint_{\varphi_R} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, 2i)$$

(infatti, il circuito considerato contiene al suo interno solamente il punto $2i$) e inoltre, tenendo presente che $2i$ è un polo del primo ordine, si ha

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f, 2i) &= \lim_{z \rightarrow 2i} (z - 2i) f(z) = \lim_{z \rightarrow 2i} \left(\frac{e^{iz}}{z + 2i} \right) \\ &= \frac{e^{-2}}{4i} = -i \frac{e^{-2}}{4}. \end{aligned}$$

Allora, esplicitando gli integrali sui cammini $\gamma_{1,R}$, $\gamma_{2,R}$

$$\int_{\gamma_{1,R}} f(z) dz + \int_{-R}^R \frac{e^{it}}{t^2 + 4} dt = 2\pi i \left(-i \frac{e^{-2}}{4} \right) = \frac{e^{-2}}{2} \pi.$$

Poiché $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z^2 + 4} = 0$, dal Lemma di Jordan 6.9.3 segue anche $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_{1,R}} f(z) dz = 0$, e quindi, passando al limite per $R \rightarrow +\infty$, si ottiene

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x + i \sin x}{x^2 + 4} dx = \frac{e^{-2}}{2} \pi,$$

da cui, uguagliando parte reale e parte immaginaria,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 4} dx = \frac{e^{-2}}{2} \pi, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2 + 4} dx = 0.$$

Infine tenendo conto della parità della funzione integranda

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 4} dx = \frac{e^{-2}}{4} \pi.$$

(il valore 0 del secondo integrale era prevedibile in quanto la funzione integranda è dispari).

Esempio 6.10.3 Calcoliamo il seguente integrale improprio

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Osserviamo che la funzione $u(x) := \sin x/x$ è integrabile (semplicemente ma non assolutamente) in \mathbb{R} in quanto è definita e continua in \mathbb{R} e all'infinito è un infinitesimo di ordine 1. Si può verificare che u non è assolutamente integrabile mentre, posto per $k \in \mathbb{N}$

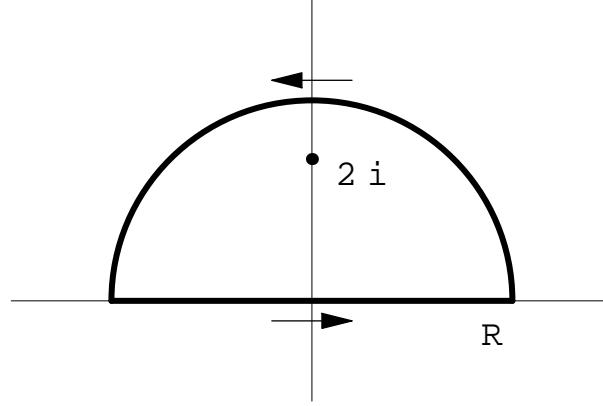


Figura – 6.4: Circuito relativo all'Esempio 6.10.2.

$a_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin x}{x} dx$, la successione (a_k) è infinitesima, a segni alterni e la successione $(|a_k|)$ è decrescente, pertanto si ha:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k,$$

e la serie converge per il Teorema di Leibniz. Analogo ragionamento vale in $(-\infty, 0]$.

Consideriamo ora la funzione complessa $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ definita ponendo, per ogni $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$,

$$f(z) := \frac{e^{iz}}{z}.$$

L'unico punto singolare è $z = 0$. Fissiamo $r < R$ e consideriamo il circuito $\varphi_{r,R}$ costituito dai quattro cammini $\gamma_{1,R} : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma_{2,r,R} : [-R, -r] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma_{3,r} : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ e $\gamma_{4,r,R} : [r, R] \rightarrow \mathbb{C}$, definiti ponendo

$$\begin{aligned} \gamma_{1,R}(t) &:= R e^{it}, & t \in [0, \pi], & \quad \gamma_{2,r,R}(t) := t, & t \in [-R, -r], \\ \gamma_{3,r}(t) &:= r e^{i(\pi-t)}, & t \in [0, \pi], & \quad \gamma_{4,r,R}(t) := t, & t \in [r, R]. \end{aligned}$$

Si osservi che $\gamma_{3,r}$ è percorso in senso orario, in modo che il circuito $\varphi_{r,R}$ viene percorso in senso antiorario (vedi Figura – 6.5). Dal teorema dei residui, non essendoci all'interno di $\varphi_{r,R}$ punti singolari, segue

$$\oint_{\varphi_{r,R}} f(z) dz = 0.$$

Allora, esplicitando gli integrali sui quattro cammini abbiamo:

$$\int_{\gamma_{1,R}} f(z) dz + \int_{-R}^{-r} \frac{e^{it}}{t} dt + \int_{\gamma_{3,r}} f(z) dz + \int_r^R \frac{e^{it}}{t} dt = 0. \quad (6.10.24)$$

Poiché $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z} = 0$, dal Lemma di Jordan 6.9.3 segue che anche $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_{1,R}} f(z) dz = 0$, mentre, poiché $\lim_{z \rightarrow 0} z f(z) = 1$, dal Teorema di Jordan sul piccolo cerchio 6.9.2, segue che $\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_{3,r}} f(z) dz = -i\pi$ (il segno “-” segue dal fatto che il cammino è percorso in verso orario). Inoltre

$$\int_{-R}^{-r} \frac{e^{it}}{t} dt = - \int_R^r \frac{e^{-is}}{-s} ds = - \int_r^R \frac{e^{-it}}{t} dt.$$

Quindi, passando al limite per $R \rightarrow +\infty$ e per $r \rightarrow 0$ nella (6.10.24) otteniamo:

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{it} - e^{-it}}{t} dt = i\pi,$$

da cui,

$$\int_0^{+\infty} \frac{2i \sin t}{t} dt = i\pi,$$

e infine, tenendo conto della parità della funzione integranda

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi.$$

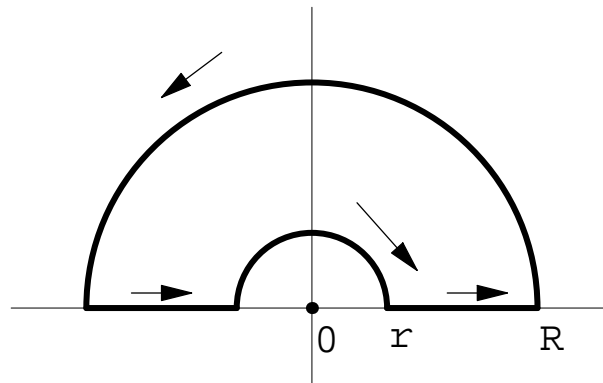


Figura – 6.5: Circuito relativo all'Esempio 6.10.3.

Esempio 6.10.4 Calcoliamo il seguente integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{x^2 + 1} dx.$$

Osserviamo innanzitutto che la funzione $u(x) := \log x / (x^2 + 1)$ è integrabile in $[0, +\infty)$ in quanto in 0 è un infinito di ordine arbitrariamente piccolo e nel punto $+\infty$ è un infinitesimo di ordine, per esempio, maggiore di $3/2$.

Prima di estendere la funzione u ad una funzione di variabile complessa, conviene tener presente che la funzione logaritmo, che è polidroma, ammette infinite determinazioni per cui si rende necessario sceglierne una. Come abbiamo osservato nella sezione 6.3.a per ottenere una determinazione olomorfa del logaritmo si esclude dal piano complesso una semiretta uscente dall'origine. Scegliamo la semiretta $\bar{r} = \{z = x + iy ; x = 0, y \leq 0\}$ e consideriamo la determinazione $\log : \mathbb{C} \setminus \bar{r} \rightarrow \mathbb{C}$ definita ponendo, per ogni $z \in \mathbb{C} \setminus \bar{r}$, $\log z = \log |z| + i\vartheta$ con $\vartheta \in \arg z$ e $\vartheta \in (-\pi/2, 3\pi/2)$. Tale funzione è olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \bar{r}$, mentre nei punti della semiretta \bar{r} , non è neanche continua (come visto nella Sezione 6.3.a). Pertanto per applicare correttamente il teorema dei residui è necessario scegliere un cammino $\varphi_{r,R}$ in modo tale che i supporti delle curve considerate non abbiano punti in comune con \bar{r} . Poiché oltre al punto singolare 0 dovuto alla funzione logaritmo vi sono in ogni caso anche i punti singolari $\pm i$, possiamo fissare $0 < r < 1 < R$ e considerare $\varphi_{r,R}$ costituito dai quattro cammini (già considerati nell'esempio precedente) $\gamma_{1,R} : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma_{2,r,R} : [-R, -r] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma_{3,r} : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ e $\gamma_{4,r,R} : [r, R] \rightarrow \mathbb{C}$, definiti ponendo

$$\begin{aligned} \gamma_{1,R}(t) &:= R e^{it} & t \in [0, \pi] , & \quad \gamma_{2,r,R}(t) &:= t & t \in [-R, -r] , \\ \gamma_{3,r}(t) &:= r e^{i(\pi-t)} & t \in [0, \pi] , & \quad \gamma_{4,r,R}(t) &:= t & t \in [r, R] . \end{aligned}$$

Si osservi che $\gamma_{3,r}$ è percorso in senso orario, in modo che il circuito $\varphi_{r,R}$ viene percorso in senso antiorario (vedi Figura – 6.6).

A questo punto, con la determinazione del logaritmo scelta in precedenza, consideriamo la funzione complessa olomorfa $f : \mathbb{C} \setminus (\bar{r} \cup \{i\}) \rightarrow \mathbb{C}$ definita ponendo,

$$f(z) := \frac{\log z}{z^2 + 1} .$$

Dal teorema dei residui segue

$$\oint_{\varphi_{r,R}} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, i)$$

(infatti, il circuito considerato contiene al suo interno solamente il punto singolare i) e inoltre, tenendo presente che i è un polo del primo ordine, si ha

$$\operatorname{Res}(f, i) = \lim_{z \rightarrow i} (z - i) f(z) = \lim_{z \rightarrow i} \left(\frac{\log z}{z + i} \right) = \frac{i\pi/2}{2i} = \frac{\pi}{4} .$$

Allora, esplicitando gli integrali sui quattro cammini

$$\int_{\gamma_{1,R}} f(z) dz + \int_{-R}^{-r} \frac{\log |t| + i\pi}{t^2 + 1} dt + \int_{\gamma_{3,r}} f(z) dz + \int_r^R \frac{\log t}{t^2 + 1} dt = i \frac{\pi^2}{2} . \quad (6.10.25)$$

Poiché $\lim_{z \rightarrow \infty} z \frac{\log z}{z^2 + 1} = 0$, dal Teorema sul grande cerchio 6.9.1 segue $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_{1,R}} f(z) dz = 0$, e poiché $\lim_{z \rightarrow 0} z \frac{\log z}{z^2 + 1} = 0$, dal Teorema sul piccolo cerchio 6.9.2 segue $\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_{3,r}} f(z) dz = 0$.

0, e tenendo conto che

$$\int_{-R}^{-r} \frac{\log |t| + i\pi}{t^2 + 1} dt = \int_r^R \frac{\log t + i\pi}{t^2 + 1} dt$$

passando al limite per $R \rightarrow +\infty$ e $r \rightarrow 0$, dalla (6.10.25) si ottiene

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log x + i\pi}{x^2 + 1} dx + \int_0^{+\infty} \frac{\log x}{x^2 + 1} dx = i\frac{\pi^2}{2},$$

da cui, uguagliando parte reale e parte immaginaria, otteniamo

$$2 \int_0^{+\infty} \frac{\log x}{x^2 + 1} dx = 0, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\pi}{x^2 + 1} dx = \frac{\pi^2}{2}.$$

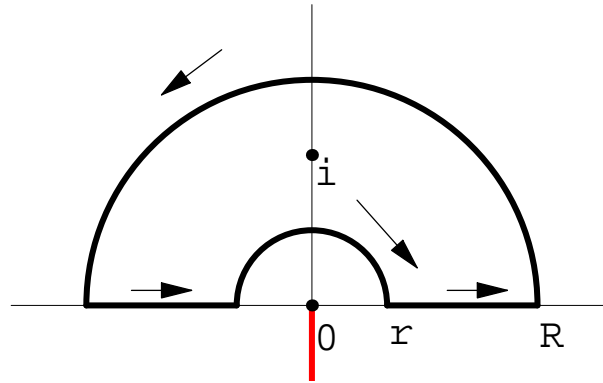


Figura – 6.6: Circuito relativo all'Esempio 6.10.4.

Esempio 6.10.5 Calcoliamo il seguente integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{(x+1)^2} dx.$$

Nonostante la somiglianza con l'integrale precedente, non possiamo usare lo stesso metodo perché la funzione presenta un polo doppio sull'asse reale in $x = -1$. Useremo dunque un cammino differente. Osserviamo innanzitutto che la funzione $u(x) := \log x / (x+1)^2$ è integrabile in $[0, +\infty)$ in quanto in 0 è un infinito di ordine arbitrariamente piccolo e nel punto $+\infty$ è un infinitesimo di ordine, per esempio, maggiore di $3/2$.

Questa volta per ottenere una determinazione olomorfa del logaritmo escludiamo dal piano complesso la semiretta $\bar{r} = \{z = x + iy ; x \geq 0, y = 0\}$ e consideriamo la determinazione $\log : \mathbb{C} \setminus \bar{r} \rightarrow \mathbb{C}$ definita ponendo, per ogni $z \in \mathbb{C} \setminus \bar{r}$, $\log z = \log |z| + i\vartheta$ con $\vartheta \in \arg z$ e $\vartheta \in (0, 2\pi)$. Tale funzione è olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \bar{r}$, mentre nei punti della semiretta \bar{r} , non è neanche continua (come visto nella Sezione 6.3.a). Scegliamo un cammino $\varphi_{r,R}$

costituito dai cammini $\gamma_{1,R} : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma_{2,r,R} : [-R, -r] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma_{3,r} : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ e $\gamma_{4,r,R} : [r, R] \rightarrow \mathbb{C}$, definiti ponendo

$$\begin{aligned} \gamma_{1,R}(t) &:= R e^{it}, & t \in [0, 2\pi], & \gamma_{2,r,R}(t) &:= R + r - t, & t \in [r, R], \\ \gamma_{3,r}(t) &:= r e^{i(2\pi-t)}, & t \in [0, 2\pi], & \gamma_{4,r,R}(t) &:= t, & t \in [r, R]. \end{aligned}$$

Poiché la determinazione del logaritmo scelta è discontinua sull'asse reale positivo, dovremmo scegliere $\varepsilon > 0$ e considerare i cammini $\gamma_{1,R}(t)$ e $\gamma_{3,R}(t)$ definiti in $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$ e conseguentemente $\gamma_{2,r,R}(t)$ e $\gamma_{4,r,R}(t)$ in modo tale da ottenere un circuito, e alla fine bisognerebbe considerare $\varepsilon \rightarrow 0^+$; per semplicità di calcoli, si preferisce porre direttamente $\varepsilon = 0$ (vedi Figura – 6.7). Osserviamo inoltre che il circuito viene percorso in senso antiorario per cui il cammino $\gamma_{2,r,R}(t)$ è l'opposto del cammino $\gamma_{4,r,R}(t)$ tuttavia, per ogni $t \in [r, R]$, la funzione logaritmo sul cammino $\gamma_{2,r,R}(t)$ assume il valore $\log t + 2\pi i$ mentre sul cammino $\gamma_{4,r,R}(t)$ assume il valore $\log t$, per cui è prevedibile che considerando la somma dei due integrali lungo $\gamma_{2,r,R}(t)$ e $\gamma_{4,r,R}(t)$ si annulli il termine con la funzione logaritmo e ciò non consente di calcolare l'integrale richiesto. Per evitare tale inconveniente, si considera il quadrato del logaritmo nella funzione da integrare e, come si vedrà, otterremo l'integrale richiesto.

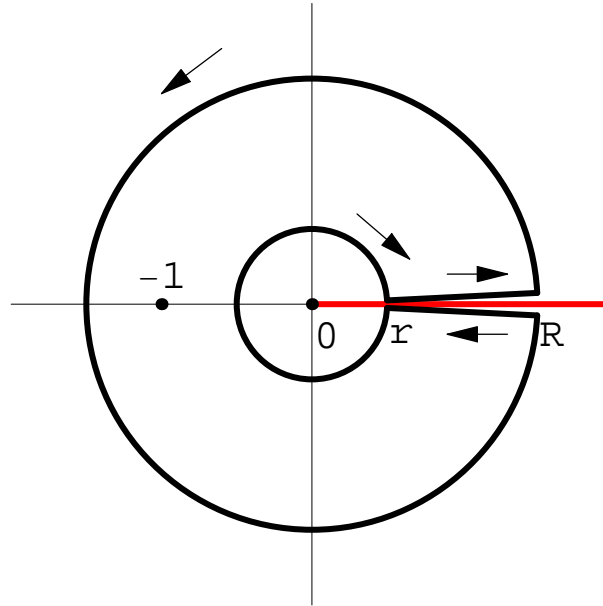


Figura – 6.7: Circuito relativo all'Esempio 6.10.5.

Pertanto, denotata per brevità con \log la determinazione della funzione logaritmo olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$, si considera la funzione complessa olomorfa $f : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ definita ponendo, per ogni $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$,

$$f(z) := \frac{\log^2 z}{(z+1)^2},$$

Dal teorema dei residui, poiché l'unico punto singolare interno al circuito considerato è -1 , segue

$$\oint_{\varphi} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, -1).$$

Il punto -1 è un polo del secondo ordine per f e quindi

$$\operatorname{Res}(f, -1) = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{d}{dz} \left((z+1)^2 \frac{\log^2 z}{(z+1)^2} \right) = \lim_{z \rightarrow -1} 2 \log z \frac{1}{z} = -2\pi i.$$

Quindi

$$\int_{\gamma_{1,R}} f(z) dz - \int_r^R \frac{(\log(r+R-t) + 2\pi i)^2}{(r+R-t+1)^2} dt + \int_{\gamma_{3,r}} f(z) dz + \int_r^R \frac{\log^2 t}{(t+1)^2} dt = 4\pi^2.$$

Poiché $\lim_{z \rightarrow \infty} z \frac{\log^2 z}{(z+1)^2} = 0$, si ha $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_{1,R}} f(z) dz = 0$ per il teorema di Jordan sul grande cerchio. Analogamente, poiché $\lim_{z \rightarrow 0} z f(z) = 0$, dal teorema di Jordan sul piccolo cerchio si ha anche $\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_{3,r}} f(z) dz = 0$. Infine, ponendo $s = r + R - t$ nel secondo integrale,

$$\begin{aligned} & - \int_r^R \frac{(\log(r+R-t) + 2\pi i)^2}{(r+R-t+1)^2} dt \\ &= \int_R^r \frac{(\log s + 2\pi i)^2}{(s+1)^2} ds = - \int_r^R \frac{(\log s + 2\pi i)^2}{(s+1)^2} ds \\ &= - \int_r^R \frac{\log^2 s}{(s+1)^2} ds - 4\pi i \int_r^R \frac{\log s}{(s+1)^2} ds + 4\pi^2 \int_r^R \frac{1}{(s+1)^2} ds. \end{aligned}$$

Osserviamo che sommando gli integrali lungo le curve $\gamma_{2,r,R}$ e $\gamma_{4,r,R}$, si elidono i termini con $\log^2 t$ e rimane invece il termine con $\log t$ che era quello che interessava, da qui l'opportunità di considerare $\log^2 z$ anziché $\log z$ nell'espressione della funzione f . Passando al limite per $r \rightarrow 0^+$ e per $R \rightarrow +\infty$ nelle relazioni ottenute, si ha

$$-4\pi i \int_0^{+\infty} \frac{\log t}{(t+1)^2} dt + 4\pi^2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{(t+1)^2} dt = 4\pi^2$$

e confrontando le parti reali ed immaginarie si ottiene

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log t}{(t+1)^2} dt = 0, \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{(t+1)^2} dt = 1.$$

Concludiamo che l'integrale richiesto è uguale a 0.

Esempio 6.10.6 Vogliamo calcolare il valore principale del seguente integrale improprio

$$(v.p.) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{(x^2 + 4)(x - 1)} dx.$$

Osserviamo che la funzione $u(x) := \sin x / ((x^2 + 4)(x - 1))$ è integrabile in un intorno dei punti $\pm\infty$ in quanto è un infinitesimo di ordine 3, tuttavia, la funzione u non è integrabile in un intorno del punto 1 in quanto in tale punto è un infinito di ordine 1. In questo caso, se il seguente limite esiste ed è finito

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \left(\int_{-\infty}^{1-r} \frac{\sin x}{(x^2 + 4)(x - 1)} dx + \int_{1+r}^{+\infty} \frac{\sin x}{(x^2 + 4)(x - 1)} dx \right),$$

esso viene denominato *valore principale dell'integrale improprio* e si pone

$$(v.p.) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{(x^2 + 4)(x - 1)} dx = \lim_{r \rightarrow 0^+} \left(\int_{-\infty}^{1-r} \frac{\sin x}{(x^2 + 4)(x - 1)} dx + \int_{1+r}^{+\infty} \frac{\sin x}{(x^2 + 4)(x - 1)} dx \right).$$

Consideriamo ora la funzione complessa olomorfa $f : \mathbb{C} \setminus \{1, \pm 2i\} \rightarrow \mathbb{C}$ definita ponendo, per ogni $z \in \mathbb{C} \setminus \{1, \pm 2i\}$,

$$f(z) := \frac{e^{iz}}{(z^2 + 4)(z - 1)}.$$

Tenendo conto che i punti singolari della funzione sono 1 e $\pm 2i$, si possono ora fissare $0 < r < 1$ ed $R > 2$ e considerare il circuito φ costituito dai quattro cammini (vedi Figura – 6.8) $\gamma_{1,R} : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma_{2,r,R} : [-R, 1 - r] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma_{3,r} : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ e $\gamma_{4,r,R} : [1 + r, R] \rightarrow \mathbb{C}$, definiti ponendo

$$\begin{aligned} \gamma_{1,R}(t) &:= R e^{it}, & t \in [0, \pi], & \quad \gamma_{2,r,R}(t) := t, & t \in [-R, 1 - r], \\ \gamma_{3,r}(t) &:= 1 + r e^{i(\pi-t)}, & t \in [0, \pi], & \quad \gamma_{4,r,R}(t) := t, & t \in [1 + r, R]. \end{aligned}$$

(osserviamo che il cammino $\gamma_{3,r}$ è percorso in senso orario in modo da rispettare il verso antiorario di φ).

Dal teorema dei residui, poiché l'unico punto singolare interno al circuito considerato è $2i$, segue

$$\oint_{\varphi} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, 2i).$$

Il punto $2i$ è un polo del primo ordine per f e pertanto

$$\operatorname{Res}(f, 2i) = \lim_{z \rightarrow 2i} (z - 2i) f(z) = \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{e^{iz}}{(z + 2i)(z - 1)} = \frac{e^{-2}}{4i(2i - 1)}.$$

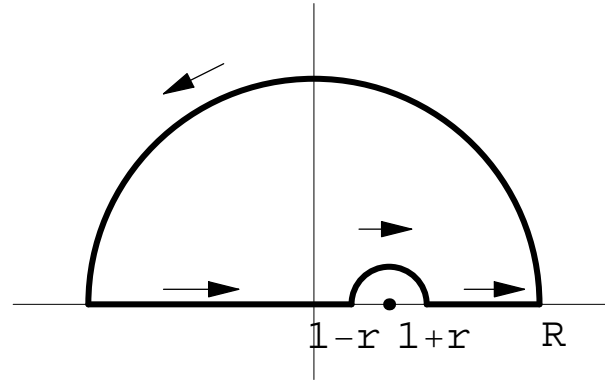


Figura – 6.8: Circuito relativo all'Esempio 6.10.6.

Quindi

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma_{1,R}} f(z) dz + \int_{-R}^{1-r} \frac{e^{it}}{(t^2 + 4)(t - 1)} dt \\
 + \int_{\gamma_{3,r}} f(z) dz + \int_{1+r}^R \frac{e^{it}}{(t^2 + 4)(t - 1)} dt \\
 = \frac{\pi}{2e^2(2i - 1)} = -\frac{\pi(2i + 1)}{10e^2}.
 \end{aligned}$$

Poiché $\lim_{z \rightarrow \infty} 1/((z^2 + 4)(z - 1)) = 0$, dal lemma di Jordan segue

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_{1,R}} f(z) dz = 0$$

inoltre, poiché $\lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)f(z) = e^i/5$, dal teorema di Jordan sul piccolo cerchio si ha

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{\gamma_{3,r}} f(z) dz = -\frac{i\pi e^i}{5}$$

(il segno negativo è giustificato dal fatto che il cammino considerato è l'opposto di quello considerato nel teorema di Jordan). Passando al limite per $R \rightarrow +\infty$ e per $r \rightarrow 0^+$ nelle relazioni ottenute, si ha

$$(v.p.) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{it}}{(t^2 + 4)(t - 1)} dt = \frac{i\pi e^i}{5} - \frac{\pi(2i + 1)}{10e^2}.$$

Poiché

$$\frac{i\pi e^i}{5} - \frac{\pi(2i + 1)}{10e^2} = -\pi \frac{2e^2 \sin 1 + 1}{10e^2} + 2\pi i \frac{e^2 \cos 1 - 1}{10e^2},$$

uguagliando le parti reali ed immaginarie, si ottiene

$$\begin{aligned} (v.p.) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos t}{(t^2 + 4)(t - 1)} dt &= -\pi \frac{2e^2 \sin 1 + 1}{10e^2}, \\ (v.p.) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{(t^2 + 4)(t - 1)} dt &= 2\pi \frac{e^2 \cos 1 - 1}{10e^2}. \end{aligned}$$

Esempio 6.10.7 Con il Teorema dei residui è possibile calcolare integrali di funzioni razionali di funzioni trigonometriche sull'intervallo $[0, 2\pi]$ senza dover ricorrere alle sostituzioni parametriche. Vogliamo ad esempio calcolare

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2 + \sin t} dt, .$$

Esprimendo il seno mediante l'esponenziale complesso, abbiamo:

$$\frac{1}{2 + \sin t} = \frac{2i}{4i + e^{it} - e^{-it}} = \frac{2ie^{it}}{4ie^{it} + e^{2it} - 1} = f(e^{it}) \cdot ie^{it},$$

dove la funzione f è data da

$$f(z) = \frac{2}{z^2 + 4iz - 1}.$$

I due poli semplici di questa funzione sono $-2i \pm i\sqrt{3}$. Possiamo interpretare l'integrale assegnato come l'integrale sulla circonferenza unitaria $\gamma_{0,1}$ della funzione f . Solo il polo $(-2 + \sqrt{3})i$ è interno al circuito, perciò:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2 + \sin t} dt = \oint_{\gamma_{0,1}} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, (-2 + \sqrt{3})i).$$

Calcolando il residuo troviamo:

$$\operatorname{Res}(f, (-2 + \sqrt{3})i) = \lim_{z \rightarrow (-2 + \sqrt{3})i} \frac{2}{z + (2 + \sqrt{3})i} = \frac{1}{i\sqrt{3}}$$

pertanto

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2 + \sin t} dt = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

Esercizi 6.10.8 Verificare i seguenti risultati, utilizzando il Teorema dei residui:

1. $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2 + 1} dx = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi$ (utilizzare un cammino come in Figura – 6.7).
2. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(x + 1)} dx = \pi.$

$$3. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\alpha x)}{x^2 + \beta^2} dx = \frac{\pi}{\beta} e^{-\alpha\beta}, \quad \alpha > 0, \beta > 0.$$

$$4. (v.p.) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x+1)(x^2+1)} dx = \frac{\pi}{2}.$$

$$5. \int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + \sin^2 x} dx = \sqrt{2} \pi.$$

CAPITOLO 7

TRASFORMATA DI FOURIER

In questo capitolo introduciamo la trasformata di Fourier e ne enunciamo le principali proprietà. Questa trasformata, oltre a consentire di risolvere numerose equazioni differenziali della fisica matematica per cui fu introdotta dal matematico francese Joseph Fourier (1768-1830), è ampiamente utilizzata nella teoria dei segnali continui per realizzarne l'analisi e la sintesi. La sua versione discreta (cioè per successioni invece che per funzioni) è diventata particolarmente utilizzata da quando, negli anni 1960, è stata introdotta la Trasformata di Fourier Rapida (FFT).

Studieremo la Trasformata di Fourier negli spazi $L^1(\mathbb{R}^n)$ ed $L^2(\mathbb{R}^n)$, rimandando a corsi successivi l'estensione a spazi di funzioni generalizzate, dette distribuzioni e la trattazione del caso discreto.

In tutto il Capitolo si considerano funzioni $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ (in alcuni casi ci soffermeremo sul caso $n = 1$)

7.1 La Trasformata di Fourier in $L^1(\mathbb{R}^n)$

Sia $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Si definisce trasformata di Fourier di u , e si denota con $\mathcal{F}(u)$ (oppure semplicemente con \hat{u}), la funzione $\mathcal{F}(u) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ definita ponendo, per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathcal{F}(u)(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} u(x) e^{-ix \cdot \xi} dx. \quad (7.1.1)$$

Si osserva innanzitutto che l'integrale a secondo membro ha senso in quanto $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ed inoltre, per ogni $x, \xi \in \mathbb{R}^n$, $|e^{-ix \cdot \xi}| = 1$.

La trasformata di Fourier è lineare, nel senso che, se $u, v \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e se $\lambda \in \mathbb{C}$, si ha

$$\mathcal{F}(u + v) = \mathcal{F}(u) + \mathcal{F}(v), \quad \mathcal{F}(\lambda u) = \lambda \mathcal{F}(u),$$

come segue direttamente dalla linearità dell'integrale in (7.1.1). Dalla (7.1.1), si ottiene subito, per ogni $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $\xi \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathcal{F}(u)(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} u(x) \cos(x \cdot \xi) dx - i \int_{\mathbb{R}^n} u(x) \sin(x \cdot \xi) dx$$

Pertanto, se u assume valori reali, si ha

$$\operatorname{Re}(\mathcal{F}(u)(\xi)) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x) \cos(x \cdot \xi) dx ,$$

$$\operatorname{Im}(\mathcal{F}(u)(\xi)) = - \int_{\mathbb{R}^n} u(x) \sin(x \cdot \xi) dx .$$

Osservazione 7.1.1 Nel caso $n = 1$, tenendo presente che l'integrale su \mathbb{R} di una funzione sommabile dispari è nullo, si ottengono le seguenti proprietà:

1. Se $u \in L^1(\mathbb{R})$ è pari, allora $\mathcal{F}(u)$ è pari,
2. Se $u \in L^1(\mathbb{R})$ è dispari, allora $\mathcal{F}(u)$ è dispari,
3. Se $u \in L^1(\mathbb{R})$ è reale e pari, allora $\mathcal{F}(u)$ è reale e pari,
4. Se $u \in L^1(\mathbb{R})$ è reale e dispari, allora $\mathcal{F}(u)$ è immaginaria pura e dispari.

Infatti, per quanto riguarda la proprietà 1., è sufficiente osservare che, per ogni $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{F}(u)(-\xi) = \int_{\mathbb{R}} u(x) \cos(-x \cdot \xi) dx = \int_{\mathbb{R}} u(x) \cos(x \cdot \xi) dx = \mathcal{F}(u)(\xi) .$$

e quindi $\mathcal{F}(u)$ è pari. Tenendo presente che la funzione coseno è pari, si ha inoltre

$$\mathcal{F}(u)(\xi) = 2 \int_0^{+\infty} u(x) \cos(x \cdot \xi) dx .$$

Analogamente, si dimostra la seconda proprietà e, in tal caso si ha

$$\mathcal{F}(u)(-\xi) = -i \int_{\mathbb{R}} u(x) \sin(-x \cdot \xi) dx = i \int_{\mathbb{R}} u(x) \sin(x \cdot \xi) dx = -\mathcal{F}(u)(\xi) .$$

Per quanto riguarda le proprietà 3. e 4., basta tener presente le espressioni già fornite della parte reale e della parte immaginaria di $\mathcal{F}(u)(\xi)$ ed applicare le proprietà 1. e 2.

Enunciano ora alcune **regole algebriche di trasformazione**.

1. (Cambiamento di scala) Sia $A = (a_{hk})$, $h, k = 1, \dots, n$ una matrice $n \times n$ non singolare. Allora A definisce la trasformazione $x \rightarrow Ax$ di \mathbb{R}^n in sé; precisamente, per ogni $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, si pone

$$(Ax)_h = \sum_{k=1}^n a_{hk} x_k .$$

Sia ora $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e definiamo la funzione $v(x) := u(Ax)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$. Allora $v \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ed inoltre, per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathcal{F}(v)(\xi) = \frac{\mathcal{F}(u)(A^{-T}\xi)}{|\det A|},$$

dove A^{-T} denota l'inversa della trasposta della matrice A . Infatti, posto $y = Ax$, si ha

$$\begin{aligned} F(u(Ax))(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} u(Ax) e^{-ix \cdot \xi} dx \\ &= \frac{1}{|\det A|} \int_{\mathbb{R}^n} u(y) e^{-i(A^{-1}y) \cdot \xi} dy \\ &= \frac{1}{|\det A|} \int_{\mathbb{R}^n} u(y) e^{-iy \cdot (A^{-T}\xi)} dy = \frac{\mathcal{F}(u)(A^{-T}\xi)}{|\det A|}. \end{aligned}$$

Nel caso particolare in cui $n = 1$, la proprietà precedente si può esprimere come segue, per ogni $a \neq 0$,

$$\mathcal{F}(u(ax))(\xi) = \frac{1}{|a|} \mathcal{F}(u)\left(\frac{\xi}{a}\right), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

2. (Traslazione) Se $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e se $a \in \mathbb{R}^n$, allora la funzione $u(x - a)$ è ancora in $L^1(\mathbb{R}^n)$ e si ha, per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathcal{F}(u(x - a))(\xi) = e^{-ia \cdot \xi} \mathcal{F}(u)(\xi).$$

Infatti, posto $y = x - a$, si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(u(x - a))(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} u(x - a) e^{-ix \cdot \xi} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} u(y) e^{-i(y+a) \cdot \xi} dy \\ &= e^{-ia \cdot \xi} \int_{\mathbb{R}^n} u(y) e^{-iy \cdot \xi} dy = e^{-ia \cdot \xi} \mathcal{F}(u)(\xi). \end{aligned}$$

3. (Modulazione) Se $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e se $a \in \mathbb{R}^n$, allora la funzione $e^{ia \cdot x} u(x)$ è ancora in $L^1(\mathbb{R}^n)$ e si ha, per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathcal{F}(e^{ia \cdot x} u(x))(\xi) = \mathcal{F}(u)(\xi - a).$$

4. Se $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e se $a \in \mathbb{R}^n$, allora la funzione $u(x) \cos(a \cdot x)$ è ancora in $L^1(\mathbb{R}^n)$ e si ha, per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathcal{F}(u(x) \cos(a \cdot x))(\xi) = \frac{1}{2} (\mathcal{F}(u)(\xi - a) + \mathcal{F}(u)(\xi + a)).$$

5. Se $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e se $a \in \mathbb{R}^n$, allora la funzione $u(x) \sin(a \cdot x)$ è ancora in $L^1(\mathbb{R}^n)$ e si ha, per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathcal{F}(u(x) \sin(a \cdot x))(\xi) = \frac{1}{2i} (\mathcal{F}(u)(\xi - a) - \mathcal{F}(u)(\xi + a)).$$

Le proprietà 3, 4 e 5 precedenti si dimostrano procedendo come per le proprietà 1 e 2.

Seguono a questo punto alcune *proprietà di regolarità* della trasformata di Fourier.

1. Per ogni $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, si ha $\mathcal{F}(u) \in C^0(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ ed inoltre $\|\mathcal{F}(u)\|_{L^\infty} \leq \|u\|_{L^1}$. Infatti, l'ultima stima segue dal fatto che $|e^{-ix \cdot \xi}| = 1$ e pertanto

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}(u)\|_{L^\infty} &= \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} u(x) e^{-ix \cdot \xi} dx \right| \\ &\leq \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |u(x)| |e^{-ix \cdot \xi}| dx = \|u\|_{L^1}. \end{aligned}$$

2. (**Lemma di Riemann-Lebesgue**) Per ogni $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, si ha

$$\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \mathcal{F}(u)(\xi) = 0.$$

Dalle proprietà precedenti segue che $\mathcal{F}(u) \in C_0(\mathbb{R}^n)$ (cioè è infinitesima all'infinito) e quindi la trasformata di Fourier è una funzione uniformemente continua.

Le successive **regole analitiche di trasformazione**, di frequente utilizzo, vengono enunciate per brevità solamente nel caso $n = 1$. La dimostrazione si ottiene usando il teorema 5.7.3

1. Supponiamo che $u \in L^1(\mathbb{R})$ e che la funzione $x \cdot u(x)$ sia anch'essa in $L^1(\mathbb{R})$. Allora $\mathcal{F}(u) \in C^1(\mathbb{R})$ ed inoltre, per ogni $\xi \in \mathbb{R}$,

$$(\mathcal{F}(u))'(\xi) = -i\mathcal{F}(x \cdot u(x))(\xi),$$

e dunque $\mathcal{F}(x \cdot u(x))(\xi) = i(\mathcal{F}(u))'(\xi)$.

2. Supponiamo che $u \in C^1(\mathbb{R})$ e che $u, u' \in L^1(\mathbb{R})$. Allora, per ogni $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{F}(u')(\xi) = i\xi \mathcal{F}(u)(\xi).$$

Considerato il *prodotto di convoluzione* $u * v$ di due funzioni $u, v \in L^1(\mathbb{R}^n)$ definito da

$$(u * v)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} u(x - y) v(y) dy,$$

risulta $(u * v) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $\|(u * v)\|_{L^1} \leq \|u\|_{L^1} \|v\|_{L^1}$.

Se p, p' sono esponenti coniugati, cioè $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, e $u \in L^p, v \in L^{p'}$, allora $u * v \in C^0$.

L'operazione di convoluzione è molto importante in quanto permette di regolarizzare una funzione. Infatti se $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $v \in C^1(\mathbb{R}^n)$ ed è nulla fuori di un insieme limitato allora $(u * v) \in C^1(\mathbb{R}^n)$ e $D_j(u * v)(x) = (u * D_j v)(x)$ per $j = 1, \dots, n$. Inoltre se la funzione v è

1. non negativa,
2. nulla fuori della sfera $B_1(0)$,
3. $\int_{B_1(0)} v(x) dx = 1$,

allora si può definire la successione $v_k(x) := k^n v(kx)$ che si chiama *successione regolarizzante* oppure *approssimazione dell'unità*. Utilizzando la successione $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ si ottiene che $u_k := (u * v_k) \in C^1(\mathbb{R}^n)$ e u_k converge in $L^1(\mathbb{R}^n)$ a u . Se la funzione u è continua allora u_k converge uniformemente a u su tutti gli insiemi compatti di \mathbb{R}^n .

Per quanto riguarda la trasformata di Fourier della convoluzione si ha

$$\mathcal{F}(u * v) = \mathcal{F}(u) \cdot \mathcal{F}(v). \quad (7.1.2)$$

Consideriamo ora brevemente il problema dell'*inversione della trasformata di Fourier*. Sia $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$; poiché $\mathcal{F}(u) \in C^0(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$, per poter invertire la trasformata di Fourier richiediamo $u \in C^0(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ oltre naturalmente alla condizione $\mathcal{F}(u) \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Vale quindi il seguente Teorema.

Teorema 7.1.2 (Inversione della Trasformata di Fourier)

Se $u \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap C^0(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ ed $\mathcal{F}(u) \in L^1(\mathbb{R}^n)$, risulta, per ogni $x \in \mathbb{R}^n$,

$$u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}(u)(\xi) e^{ix \cdot \xi} d\xi.$$

Se si suppongono solamente le condizioni $u, \mathcal{F}(u) \in L^1(\mathbb{R}^n)$, allora la formula precedente vale quasi ovunque.

Se indichiamo con \tilde{u} la funzione $\tilde{u}(x) = u(-x)$, allora se $u, \mathcal{F}(u) \in L^1$ risulta

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}(u)) = (2\pi)^n \tilde{u} \quad \text{q.o. in } \mathbb{R}^n.$$

Se $u, \mathcal{F}(u) \in L^1$ e $v, \mathcal{F}(v) \in L^1$, allora, usando la formula precedente e la formula (7.1.2), si ha

$$\mathcal{F}(u \cdot v) = \frac{1}{(2\pi)^n} (\mathcal{F}(u) * \mathcal{F}(v)).$$

7.2 La Trasformata di Fourier in $L^2(\mathbb{R}^n)$

Lo spazio $L^2(\mathbb{R}^n)$ è molto importante, infatti i segnali che gli appartengono sono detti segnali di energia finita.

Se la funzione u appartiene a $L^2(\mathbb{R}^n)$ l'integrale in (7.1.1) può non essere convergente. Pertanto nello spazio $L^2(\mathbb{R}^n)$, la trasformata di Fourier può essere definita nel modo seguente.

Sia $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e, per ogni $r > 0$, si consideri la funzione $u_r := u \cdot \chi_{[-r,r]^n}$

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : u \cdot \chi_{[-r,r]^n}(x) = \begin{cases} u(x), & x \in [-r, r]^n, \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus [-r, r]^n. \end{cases}$$

Queste funzioni, per l'osservazione 5.3.2, appartengono a $L^1(\mathbb{R}^n)$ e se ne può calcolare la trasformata usando la definizione (7.1.1). Si verifica che esiste il limite nel senso di $L^2(\mathbb{R}^n)$ di \hat{u}_r per $r \rightarrow +\infty$. Allora la trasformata $\mathcal{F}(u)$ è definita ponendo

$$\mathcal{F}(u)(\xi) := \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^n} u_r(x) e^{-ix \cdot \xi} dx = \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{[-r,r]^n} u(x) e^{-ix \cdot \xi} dx,$$

dove il limite precedente va inteso nel senso della convergenza in $L^2(\mathbb{R}^n)$, essendo anche $\mathcal{F}(u) \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

In $L^2(\mathbb{R}^n)$ il teorema di inversione ha un enunciato molto più semplice di quello in $L^1(\mathbb{R}^n)$. Infatti si ha che $u \in L^2(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow \mathcal{F}(u) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e risulta:

$$u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}(u)(\xi) \cdot \chi_{[-r,r]^n}(\xi) e^{ix \cdot \xi} d\xi, \quad (7.2.3)$$

nel senso della convergenza in $L^2(\mathbb{R}^n)$.

In $L^2(\mathbb{R}^n)$ valgono le regole di trasformazione algebriche e analitiche analoghe a quelle viste in L^1 e si ha l'*uguaglianza di Plancherel*:

$$\|\mathcal{F}(u)\|_{L^2} = (2\pi)^{n/2} \|u\|_{L^2}, \quad (7.2.4)$$

ossia

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}(u)(\xi)|^2 d\xi = (2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^2 dx.$$

7.3 Esempi ed applicazioni

Esempio 7.3.1 Sia $a > 0$ e si consideri la funzione $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo, per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$u(x) := \begin{cases} e^{-ax} & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Allora $u \in L^1(\mathbb{R})$ e, per ogni $\xi \in \mathbb{R}$, risulta

$$\mathcal{F}(u)(\xi) = \int_0^{+\infty} e^{-(a+i\xi) \cdot x} dx = \lim_{r \rightarrow +\infty} \left[\frac{e^{-(a+i\xi) \cdot x}}{-(a+i\xi)} \right]_0^r = \frac{1}{a+i\xi}.$$

Se si considera la funzione

$$v(x) := \begin{cases} e^{ax} & x \leq 0, \\ 0, & x > 0, \end{cases}$$

si ha $v \in L^1(\mathbb{R})$ e analogamente, per ogni $\xi \in \mathbb{R}$, risulta

$$\mathcal{F}(v)(\xi) = \int_{-\infty}^0 e^{(a-i\xi) \cdot x} dx = \lim_{r \rightarrow -\infty} \left[\frac{e^{(a-i\xi) \cdot x}}{(a-i\xi)} \right]_r^0 = \frac{1}{a-i\xi}.$$

Dalle due trasformate precedenti e dalla linearità della trasformata di Fourier, si ottiene anche, per ogni $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{F}(e^{-a|x|})(\xi) = \mathcal{F}(u)(\xi) + \mathcal{F}(v)(\xi) = \frac{1}{a+i\xi} + \frac{1}{a-i\xi} = \frac{2a}{a^2 + \xi^2}.$$

Esempio 7.3.2 Sia $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e si consideri la funzione $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo, per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$u(x) := \frac{1}{a^2 + x^2}.$$

Osserviamo innanzitutto che $u \in L^1(\mathbb{R})$ e quindi si può considerare la trasformata di Fourier di u . Si ha, per ogni $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{F}(u)(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a^2 + x^2} e^{-i\xi \cdot x} dx.$$

Supponiamo in una prima fase $\xi \geq 0$ e consideriamo $R > |a|$, la funzione $f(z) := e^{-i\xi z} / (a^2 + z^2)$ ed il circuito costituito dai cammini $\gamma_{1,R} : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ e $\gamma_{2,R} : [-R, R] \rightarrow \mathbb{C}$ definiti ponendo

$$\gamma_{1,R}(t) := R e^{-it}, \quad t \in [0, \pi], \quad \gamma_{2,R}(t) := t, \quad t \in [-R; R].$$

Poiché f ha un polo del primo ordine in $-|a|i$, dal teorema dei residui segue

$$\int_{\gamma_{1,R}} f(z) dz + \int_{\gamma_{2,R}} f(z) dz = -2\pi i \operatorname{Res}(f, -|a|i)$$

(il segno negativo è dovuto al fatto che il circuito è orientato in senso orario) ed inoltre

$$\operatorname{Res}(f, -|a|i) = \lim_{z \rightarrow -|a|i} \frac{e^{-i\xi z}}{z - |a|i} = -\frac{e^{-|a|\xi}}{2|a|i}$$

da cui

$$\int_{\gamma_{1,R}} f(z) dz + \int_{\gamma_{2,R}} f(z) dz = \frac{\pi}{|a|} e^{-|a|\xi}.$$

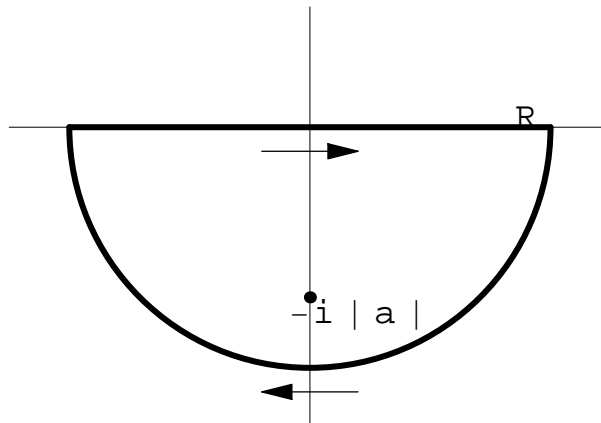


Figura – 7.1: Circuito relativo all'Esempio 7.3.2.

La funzione $e^{-i\xi z}$ è limitata sul semipiano $\text{Im } z \leq 0$ in quanto, se $z = x + iy$ con $y \leq 0$, risulta $|e^{-i\xi z}| = |e^{-i\xi x} e^{\xi y}| = |e^{\xi y}| \cdot 1 \leq 1$ (si è scelto $\xi \geq 0$ ed un circuito contenuto nel semipiano delle parti immaginarie negative proprio per far valere la limitatezza di $e^{-i\xi z}$) e si ha $\lim_{|z| \rightarrow +\infty} u(z) = 0$. Quindi, per il Lemma di Jordan, l'integrale di f lungo il cammino $\gamma_{1,R}$ tende a 0 per $R \rightarrow +\infty$. Pertanto

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a^2 + t^2} e^{-i\xi \cdot t} dt = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_{2,R}} f(z) dz = \frac{\pi e^{-|a|\xi}}{|a|},$$

da cui, per ogni $\xi \geq 0$,

$$\mathcal{F}(u)(\xi) = \frac{\pi e^{-|a|\xi}}{|a|}.$$

La funzione $\mathcal{F}(u)$ deve essere pari e quindi, per ogni $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{F}(u)(\xi) = \frac{\pi e^{-|a\xi|}}{|a|}.$$

Alternativamente, si poteva anche utilizzare la formula di inversione applicata alla trasformata trovata nell'Esempio 7.3.1 precedente; infatti sia la funzione considerata che la sua trasformata sono in $L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}) \cap C^0(\mathbb{R})$. Si supponga, per semplicità, $a > 0$, essendo, per ogni $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{F}(e^{-a|x|})(\xi) = \frac{2a}{a^2 + \xi^2},$$

si ottiene, per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} e^{-a|x|} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2a}{a^2 + \xi^2} e^{i\xi \cdot x} d\xi \\ &= \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a^2 + \xi^2} e^{i\xi \cdot x} d\xi \\ &= \frac{a}{\pi} \mathcal{F} \left(\frac{1}{a^2 + \xi^2} \right) (-x) \end{aligned}$$

e quindi, invertendo i ruoli delle variabili ξ ed x , si ha

$$\mathcal{F} \left(\frac{1}{a^2 + x^2} \right) (-\xi) = \mathcal{F} \left(\frac{1}{a^2 + x^2} \right) (\xi) = \frac{\pi}{a} e^{-a|\xi|}.$$

Esempio 7.3.3 (La trasformata della funzione “porta”).

Vogliamo calcolare la trasformata di Fourier della funzione caratteristica dell'intervallo $[-1, 1]$ che è stata definita in 5.2.3. Poniamo $u(x) := \chi_{[-1,1]}(x)$. Naturalmente $u \in L^1(\mathbb{R})$ pertanto possiamo usare la definizione (7.1.1). Per $\xi \neq 0$ si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(u)(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} u(x) e^{-i\xi \cdot x} dx \\ &= \int_{-1}^1 e^{-i\xi \cdot x} dx = \left[\frac{e^{-i\xi \cdot x}}{-i\xi} \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{e^{-i\xi} - e^{i\xi}}{-i\xi} = \frac{2 \sin \xi}{\xi}. \end{aligned}$$

Poiché $\mathcal{F}(u)$ è continua si ha $\mathcal{F}(u)(0) = 2$. Per calcolare la trasformata della funzione caratteristica $u_T(x) := \chi_{[-T,T]}(x)$ basta applicare la regola per il cambiamento di scala. Risulta infatti $u_T(x) = \chi_{[-1,1]}(x/T)$ per cui

$$\mathcal{F}(u_T)(\xi) = \frac{2 \sin(T\xi)}{\xi} \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

La funzione $\mathcal{F}(u) \in L^2(\mathbb{R})$ mentre non è sommabile (vedi 6.10.3). Possiamo calcolare la Trasformata di Fourier della funzione $v(x) := \frac{\sin x}{x}$ usando la formula di inversione in $L^2(\mathbb{R})$ (7.2.3). Otteniamo, scambiando i ruoli di x e ξ

$$\pi \chi_{[-1,1]}(x) = \pi \chi_{[-1,1]}(-x) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{-r}^r \frac{\sin \xi}{\xi} e^{-i\xi \cdot x} d\xi.$$

Esempio 7.3.4 (La trasformata della funzione gaussiana.)

Consideriamo la trasformata di Fourier della funzione

$$u(x) := e^{-ax^2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

con $a > 0$ fissato. La funzione u è in $L^1(\mathbb{R})$ e potremmo fare il calcolo nella definizione (7.1.1) utilizzando il teorema dei residui, integrando su un circuito rettangolare con base sull'asse reale di lunghezza $2R$ e altezza $\xi/(2\sqrt{a})$ e mandando R all'infinito (vedi ad esempio [3]), ma utilizzeremo invece un metodo che sfrutta le regole analitiche di trasformazione. Infatti, nel caso in esame, risulta $u \in C^1(\mathbb{R})$ con $u' \in L^1(\mathbb{R})$ e quindi, dalle proprietà generali della trasformata di Fourier,

$$\mathcal{F}(u')(\xi) = i\xi \mathcal{F}(u)(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Inoltre anche la funzione $v(x) := xu(x)$ è in $L^1(\mathbb{R})$ e pertanto, sempre dalle proprietà generali della trasformata di Fourier, si ha $\mathcal{F}(u) \in C^1(\mathbb{R})$ e, per ogni $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{F}(u)'(\xi) = -i\mathcal{F}(v)(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Dall'equazione $u'(x) = -2ax e^{-ax^2} = -2a x u(x)$, considerando la trasformata di Fourier di entrambi i membri, si ottiene

$$i\xi \mathcal{F}(u)(\xi) = -2ai\mathcal{F}(u)'(\xi),$$

da cui

$$\frac{\mathcal{F}(u)'}{\mathcal{F}(u)}(\xi) = -\frac{\xi}{2a}.$$

La soluzione generale di tale equazione differenziale lineare del primo ordine è data da

$$\mathcal{F}(u)(\xi) = c e^{-\xi^2/(4a)}, \quad c \in \mathbb{R},$$

e tenendo presente che, utilizzando (5.5.13), deve essere

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(u)(0) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{\mathbb{R}} \sqrt{a} e^{-(\sqrt{a}x)^2} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \end{aligned}$$

si ricava $c = \sqrt{\pi/a}$, da cui risulta

$$\mathcal{F}(u)(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\xi^2/(4a)}.$$

Esempio 7.3.5 Utilizzando le regole di trasformazione e l'Esempio 7.3.4 precedente, si possono calcolare le trasformate di Fourier delle funzioni $v, w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ definite ponendo, per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} v(x) &:= e^{-a(x-b)^2}, \quad a > 0, b \in \mathbb{R}, \\ w(x) &:= e^{icx} e^{-a(x-b)^2}, \quad a > 0, b, c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Infatti, considerata la funzione $u(x) := e^{-ax^2}$ dell'Esempio 7.3.4 precedente, si ha, per ogni $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(v)(\xi) &= \mathcal{F}(u(x-b))(\xi) = e^{-ib\xi} \mathcal{F}(u)(\xi) \\ &= e^{-ib\xi} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\xi^2/(4a)} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\xi^2/(4a) - ib\xi}.\end{aligned}$$

Conseguentemente, per ogni $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{F}(w)(\xi) = \mathcal{F}(e^{icx} v(x))(\xi) = \mathcal{F}(v)(\xi - c) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-(\xi-c)^2/(4a) - ib(\xi-c)}.$$

Esercizi 7.3.6

1. Calcolare le trasformate di Fourier delle seguenti funzioni:

$$(1 - |x|)_+, \quad \cos x \cdot \chi_{[-\pi/2, \pi/2]}, \quad \sin x \cdot \chi_{[-\pi, \pi]}.$$

2. Partendo dalla trasformata di $1/(1+x^2)$ che vale $\pi e^{-|\xi|}$, calcolare le trasformate di

$$\frac{\cos x}{1+x^2}, \quad \frac{1}{1+(x+3)^2}, \quad \frac{1}{4+x^2},$$

e di

$$\frac{x}{(1+x^2)^2}, \quad \frac{x^2}{(1+x^2)^2}, \quad \frac{1}{(1+x^2)^2}.$$

3. Usando la formula di Plancherel (7.2.4) calcolare

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{(x^2+1)^2}.$$

CAPITOLO 8

TRASFORMATA DI LAPLACE

Nel presente capitolo consideriamo brevemente un ulteriore tipo di trasformata che in diverse applicazioni, come per esempio la risoluzione di equazioni differenziali, presenta dei vantaggi rispetto alla trasformata di Fourier. Anche per la trasformata di Laplace ci si limita a considerare le proprietà più immediate insieme a qualche esempio ed applicazione. Nel seguito del capitolo si seguirà la convenzione di denotare con lettere maiuscole le funzioni assegnate e con la corrispondente lettera minuscola la relativa trasformata di Laplace.

8.1 Proprietà generali

Sia $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione tale che il suo supporto $\text{Spt}(F)$ (cioè la chiusura dell'insieme dove è diversa da zero) sia contenuto in $[0; +\infty[$.

Definizione 8.1.1 *Si dice che F è \mathcal{L} -trasformabile, oppure trasformabile secondo Laplace, se esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che la funzione $F_\lambda(t) := F(t)e^{-\lambda t}$ sia sommabile (cioè, $F_\lambda \in L^1([0; +\infty[))$). In tal caso, si possono definire l'insieme di convergenza assoluta*

$$\Omega_F := \{s \in \mathbb{C} : F_s \in L^1([0; +\infty[)\}$$

e la funzione $\mathcal{L}(F) : \Omega_F \rightarrow \mathbb{C}$ ponendo, per ogni $s \in \Omega_F$,

$$\mathcal{L}(F)(s) := \int_0^{+\infty} F(t)e^{-st} dt. \quad (8.1.1)$$

Tale funzione viene denominata trasformata di Laplace di F ; talvolta viene denotata semplicemente con il simbolo f .

Si riconosce facilmente che, se $\lambda \in \mathbb{R} \cap \Omega_F$, allora per ogni $s \in \mathbb{C}$ tale che $\text{Re } s \geq \lambda$, si ha ancora $F_s \in L^1([0, +\infty[)$ e quindi $s \in \Omega_F$. Infatti, è sufficiente tener presente che

$$F(t)e^{-st} = F(t)e^{-\lambda t} e^{(-\text{Re } s + \lambda)t} e^{-i(\text{Im } s)t}$$

e che il secondo membro è sommabile in quanto la funzione $F(t)e^{-\lambda t}$ è sommabile, la funzione $e^{(-\text{Re } s + \lambda)t}$ è compresa tra 0 e 1 per $t \in [0, +\infty[$ e, per quanto riguarda la funzione

$e^{-i(\operatorname{Im} s)t}$, si ha $|e^{-i(\operatorname{Im} s)t}| = 1$ e quindi è anch'essa limitata. Pertanto, considerata l'ascissa di convergenza assoluta di F

$$\lambda_F := \inf \{ \lambda \in \mathbb{R} : F_\lambda \in L^1([0; +\infty[) \},$$

con la convenzione $\lambda_F = -\infty$ se l'insieme $\{ \lambda \in \mathbb{R} : F_\lambda \in L^1([0; +\infty[) \}$ non è limitato inferiormente, valgono le seguenti proprietà

1. Se $\lambda_F = -\infty$, allora $\Omega_F = \mathbb{C}$.
2. Se $\lambda_F \in \mathbb{R}$, allora
 - i) Il semipiano $\{ s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s > \lambda_F \}$ è contenuto in Ω_F (cioè, la trasformata di Laplace è definita per $\operatorname{Re} s > \lambda_F$),
 - ii) Il semipiano $\{ s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s < \lambda_F \}$ ha intersezione vuota con Ω_F (cioè, la trasformata di Laplace non è definita in alcun punto $\operatorname{Re} s < \lambda_F$).

Considerato $\lambda \in \Omega_F \cap \mathbb{R}$, la trasformata di Laplace di F è quindi definita su tutta la retta $\{ \lambda + i\mu : \mu \in \mathbb{R} \}$ e risulta, per ogni $\mu \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{L}(F)(\lambda + i\mu) = \int_0^{+\infty} F(t) e^{-\lambda t} e^{-i\mu t} dt = \mathcal{F}(F_\lambda)(\mu).$$

La formula precedente esprime un legame tra la trasformata di Laplace e quella di Fourier; in essa, la funzione F viene intesa estesa a tutto \mathbb{R} assumendo il valore 0 in $] -\infty, 0[$, per cui l'integrale su $[0, +\infty[$ coincide con quello su tutta la retta come previsto nella trasformata di Fourier. Si può pertanto affermare che se $\lambda_F \in \Omega_F$, allora ogni $s \in \mathbb{C}$ tale che $\operatorname{Re} s = \lambda_F$ è ancora in Ω_F e quindi in questo caso Ω_F coincide con il semipiano chiuso $\{ s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s \geq \lambda_F \}$. Se $\lambda_F \notin \Omega_F$, si può dire solamente che

$$\{ s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s > \lambda_F \} \subset \Omega_F \subset \{ s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s \geq \lambda_F \}.$$

Seguono ora alcune proprietà elementari della trasformata di Laplace.

1. (Derivata delle trasformata) Se $F : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{C}$ è \mathcal{L} -trasformabile, allora $\mathcal{L}(F)$ è olomorfa nel semipiano $\{ s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s > \lambda_F \}$ e si ha, per ogni $k \in \mathbb{N}$ ed $s \in \mathbb{C}$ tale che $\operatorname{Re} s > \lambda_F$,

$$\mathcal{L}(F)^{(k)}(s) = (-1)^k \mathcal{L}(t^k F(t))(s). \quad (8.1.2)$$

Inoltre

$$\lim_{\operatorname{Re} s \rightarrow +\infty} \mathcal{L}(F)(s) = 0.$$

2. Siano $F, G : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{C}$ funzioni \mathcal{L} -trasformabili. Allora, per ogni $s \in \Omega_F \cap \Omega_G$,

$$\mathcal{L}(F + G)(s) = \mathcal{L}(F)(s) + \mathcal{L}(G)(s).$$

Inoltre, per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$,

$$\mathcal{L}(\alpha F) = \alpha \mathcal{L}(F) .$$

La presente proprietà esprime la linearità della trasformata di Laplace, anche se la trasformata della somma può non essere definita nello stesso insieme di convergenza della trasformata di F o di G .

A questo punto possono essere enunciate alcune *regole di trasformazione algebriche*.

1. (Cambiamento di scala) Se $F : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{C}$ è \mathcal{L} -trasformabile e se $a > 0$, allora la funzione $G(t) := F(at)$ è \mathcal{L} -trasformabile e si ha, per ogni $\operatorname{Re} s > a\lambda_F$,

$$\mathcal{L}(G)(s) = \frac{1}{a} \mathcal{L}(F) \left(\frac{s}{a} \right) .$$

Infatti, effettuando la sostituzione $\tau = at$,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} G(t) e^{-st} dt &= \int_0^{+\infty} F(at) e^{-st} dt \\ &= \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} F(\tau) e^{-s\tau/a} d\tau \\ &= \frac{1}{a} \mathcal{L}(F) \left(\frac{s}{a} \right) . \end{aligned}$$

si osservi che per l'ultima uguaglianza è necessario imporre $\operatorname{Re}(s/a) > \lambda_F$ e quindi, poiché a è reale, $\operatorname{Re} s > a\lambda_F$.

2. (Traslazione) Se $F : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{C}$ è \mathcal{L} -trasformabile e se $a > 0$, allora la funzione $G(t) := F(t - a)$ (F viene considerata nulla in $[-a, 0]$) è \mathcal{L} -trasformabile e si ha, per ogni $\operatorname{Re} s > \lambda_F$,

$$\mathcal{L}(G)(s) = e^{-as} \mathcal{L}(F)(s) .$$

Infatti, effettuando la sostituzione $\tau = t - a$,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} G(t) e^{-st} dt &= \int_0^{+\infty} F(t - a) e^{-st} dt \\ &= e^{-as} \int_0^{+\infty} F(\tau) e^{-s\tau} d\tau = e^{-as} \mathcal{L}(F)(s) . \end{aligned}$$

3. (Modulazione) Se $F : [0 + \infty[\rightarrow \mathbb{C}$ è \mathcal{L} -trasformabile e se $\alpha \in \mathbb{C}$, allora la funzione $G(t) := e^{\alpha t} F(t)$ è \mathcal{L} -trasformabile e si ha, per ogni $\operatorname{Re} s > \lambda_F + \operatorname{Re} \alpha$,

$$\mathcal{L}(G)(s) = \mathcal{L}(F)(s - \alpha) .$$

Infatti

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} G(t) e^{-st} dt &= \int_0^{+\infty} F(t) e^{\alpha t} e^{-st} dt \\ &= \int_0^{+\infty} F(t) e^{-(s-\alpha)t} dt = \mathcal{L}(F)(s-\alpha).\end{aligned}$$

Per enunciare le proprietà successive, è necessario ricorrere ad alcune ulteriori proprietà delle funzioni ed all'introduzione di nuovi spazi di funzioni. Innanzitutto, siano I un intervallo di \mathbb{R} e $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione. Si dice che f è *assolutamente continua in I* se, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che, assegnato un numero finito di intervalli aperti e a due a due disgiunti $I_j =]a_j, b_j[\subset I$, $j = 1, \dots, m$, se vale la condizione $\sum_{j=1}^m (b_j - a_j) < \delta$, allora

deve essere anche $\sum_{j=1}^m |f(b_j) - f(a_j)| < \varepsilon$. Dalla definizione precedente segue subito che

una funzione assolutamente continua in I è anche uniformemente continua in I (basta considerare nella definizione il caso $m = 1$) e quindi continua. Una caratterizzazione semplice delle funzioni assolutamente continue si esprime dicendo che f è assolutamente continua in I se e solo se è derivabile quasi ovunque, $f' \in L^1(I)$ e

$$f(y) - f(x) = \int_x^y f'(t) dt \quad x, y \in I \quad (8.1.3)$$

(quindi le funzioni assolutamente continue coincidono con le primitive delle funzioni in $L^1(I)$). L'insieme delle funzioni assolutamente continue su I viene denotato con $AC(I)$. In diverse circostanze, si è interessati a proprietà locali per cui non è importante che la funzione assegnata sia assolutamente continua in tutto il suo insieme di definizione, ma solamente in un intorno di ogni punto prefissato. Pertanto, si dice che una funzione $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ è *localmente assolutamente continua in I* se è assolutamente continua in ogni intervallo chiuso e limitato contenuto in I . L'insieme delle funzioni localmente assolutamente continue in I viene denotato con $AC_{loc}(I)$. Introdotto lo spazio $L^1_{loc}(I)$ delle funzioni localmente sommabili su I (cioè delle funzioni che sono sommabili in ogni intervallo chiuso e limitato contenuto in I), si ha che $f \in AC_{loc}(I)$ se e solo se f è derivabile quasi ovunque, $f' \in L^1_{loc}(I)$ e vale (8.1.3) (quindi le funzioni localmente assolutamente continue coincidono con le primitive delle funzioni in $L^1_{loc}(I)$). Per quanto riguarda le proprietà delle trasformate di Laplace, si è ovviamente interessati agli spazi $AC([0, +\infty[)$ e $AC_{loc}([0, +\infty[)$.

Possiamo ora vedere alcune *regole di trasformazione analitiche*.

Teorema 8.1.2 (Trasformata della derivata) *Sia $F : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{C}$ una funzione appartenente a $AC_{loc}([0, +\infty[)$ e si supponga che F ed F' siano \mathcal{L} -trasformabili. Allora, per ogni $s \in \mathbb{C}$ tale che $\operatorname{Re} s > \lambda_F$, si ha*

$$\mathcal{L}(F')(s) = s\mathcal{L}(F)(s) - F(0^+).$$

Naturalmente con le analoghe ipotesi su F , F' e F'' si ottiene

$$\mathcal{L}(F'')(s) = s^2 \mathcal{L}(F)(s) - F(0^+)s - F'(0^+),$$

e così via per le derivate successive.

Teorema 8.1.3 (Trasformata della primitiva) *Sia $F : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{C}$ una funzione \mathcal{L} -trasformabile. Allora, per ogni $s \in \mathbb{C}$ tale che $\operatorname{Re} s > \max\{0, \lambda_F\}$, si ha*

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t F(\tau) d\tau\right)(s) = \frac{1}{s} \mathcal{L}(F)(s).$$

Teorema 8.1.4 *Sia $F : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{C}$ una funzione \mathcal{L} -trasformabile e si supponga che anche la funzione $F(t)/t$ sia \mathcal{L} -trasformabile. Allora, per ogni $s \in \mathbb{C}$ tale che $\operatorname{Re} s > \max\{0, \lambda_F\}$, si ha*

$$\mathcal{L}\left(\frac{F(t)}{t}\right)(s) = \int_{\operatorname{Re} s + i \operatorname{Im} s}^{+\infty + i \operatorname{Im} s} \mathcal{L}(F)(\tau) d\tau$$

(quindi l'integrale va calcolato sulla parte reale di s da $\operatorname{Re} s$ a $+\infty$).

Teorema 8.1.5 *Sia $F : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{C}$ una funzione appartenente a $AC_{loc}([0, +\infty[)$ e si supponga che F ed F' siano \mathcal{L} -trasformabili. Allora*

1. **(Valore iniziale)** $\lim_{\operatorname{Re} s \rightarrow +\infty} s \mathcal{L}(F)(s) = F(0) \in \mathbb{C}.$
2. **(Valore finale)** *Se si suppone in più $F \in AC([0, +\infty[)$, allora il seguente limite*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) =: F(+\infty)$$

esiste in \mathbb{C} ; inoltre F è limitata, $\lambda_F \leq 0$ e

$$\lim_{\substack{s \rightarrow 0 \\ \operatorname{Re} s > 0}} s \mathcal{L}(F)(s) = F(+\infty).$$

Si può riconoscere che se $F, G : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{C}$ sono funzioni \mathcal{L} -trasformabili, si può considerare il *prodotto di convoluzione* $F * G : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{C}$ definito ponendo, per ogni $t \in [0, +\infty[$,

$$(F * G)(t) := \int_0^t F(t - \tau) G(\tau) d\tau.$$

Allora $(F * G)$ è anch'esso \mathcal{L} -trasformabile con $\lambda_{F * G} = \max\{\lambda_F, \lambda_G\}$ e inoltre, per ogni $s \in \mathbb{C}$ tale che $\operatorname{Re} s > \lambda_{F * G}$, si ha

$$\mathcal{L}(F * G)(s) = \mathcal{L}(F)(s) \mathcal{L}(G)(s).$$

In particolare, si consideri la *funzione di Heaviside* $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo, per ogni $t \in \mathbb{R}$,

$$H(t) := \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases} \quad (8.1.4)$$

Dalla definizione (8.1.1) risulta facilmente $\mathcal{L}(H)(s) = \frac{1}{s}$ e allora la formula precedente applicata con $G := H$ fornisce

$$\mathcal{L}(F * H)(s) = \frac{\mathcal{L}(F)(s)}{s}$$

per ogni $s \in \mathbb{C}$ tale che $\operatorname{Re} s > \max\{0, \lambda_F\}$. Tenendo presente che

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(F * H)(s) &= \mathcal{L}\left(\int_0^{+\infty} F(t - \tau) d\tau\right)(s) = \mathcal{L}\left(\int_0^t F(t - \tau) d\tau\right)(s) \\ &= \mathcal{L}\left(-\int_t^0 F(r) dr\right)(s) = \mathcal{L}\left(\int_0^t F(r) dr\right)(s) \end{aligned}$$

(si è tenuto conto del fatto che F si annulla in $] -\infty, 0[$ e si è applicato il cambiamento di variabile $r = t - \tau$), si ritrova il risultato ottenuto nel Teorema 8.1.3.

8.2 Inversione della trasformata di Laplace

Sia $F : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{C}$ una funzione \mathcal{L} -trasformabile con ascissa assoluta di convergenza λ_F e si supponga che esista un sottoinsieme finito $H \subset [0, +\infty[$ tale che F sia derivabile in $[0, +\infty[\setminus H$ ed inoltre nei punti di H esistano e siano finiti i limiti sinistro e destro di F e le derivate sinistra e destra di F (se F non è continua in t , posto $F(t^+) =: \lim_{\tau \rightarrow t^+} F(\tau)$ e analogamente $F(t^-) =: \lim_{\tau \rightarrow t^-} F(\tau)$, la derivata destra è da intendersi come il seguente limite $F'_+(t) := \lim_{\tau \rightarrow t^+} \frac{F(\tau) - F(t^+)}{t - \tau}$ e analogamente la derivata sinistra è data da $F'_-(t) := \lim_{\tau \rightarrow t^-} \frac{F(\tau) - F(t^-)}{t - \tau}$). Allora per ogni $a \in \mathbb{R}$ tale che $a > \lambda_F$ e per ogni $t > 0$, si ha

$$\frac{1}{2\pi i} (v.p.) \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \mathcal{L}(F)(s) e^{st} ds = \frac{F(t^+) + F(t^-)}{2}.$$

Quindi, l'integrale è calcolato sulla retta verticale $\operatorname{Re} s = a$. Nel caso in cui F è continua in $t > 0$, la formula precedente diventa

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i} (v.p.) \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \mathcal{L}(F)(s) e^{st} ds.$$

Quest'ultima formula fornisce la funzione F in termini della sua trasformata di Laplace. Seguono ora alcune condizioni sufficienti sulla funzione f per la sua validità.

Teorema 8.2.1 Sia $\lambda \in \mathbb{R}$ e si supponga che $f : \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s > \lambda\} \rightarrow \mathbb{C}$ sia una funzione olomorfa per cui esistono $M > 0$ ed $\alpha > 1$ tali che

$$\forall s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s > \lambda : |f(s)| \leq \frac{M}{1 + |s|^\alpha}.$$

Allora esiste una funzione \mathcal{L} -trasformabile e continua $F : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{C}$ tale che

1. $\lambda_F \leq \lambda$ ed inoltre, per ogni $s \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} s > \lambda$, $f(s) = \mathcal{L}(F)(s)$.
2. Per ogni $a \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} a > \lambda$ e per ogni $t \geq 0$,

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i} (v.p.) \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \mathcal{L}(F)(s) e^{st} ds.$$

Teorema 8.2.2 Sia $\lambda \geq 0$ e si supponga che $g : \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s > \lambda\} \rightarrow \mathbb{C}$ sia una funzione olomorfa per cui esistono $M > 0$ ed $\alpha > 1$ tali che

$$\forall s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s > \lambda : |g(s)| \leq \frac{M}{1 + |s|^\alpha}.$$

Sia inoltre $c \in \mathbb{C}$ e si consideri la funzione $f : \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s > \lambda\} \rightarrow \mathbb{C}$ definita ponendo, per ogni $s \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} s > \lambda$,

$$f(s) := \frac{c}{s} + g(s).$$

Allora esiste una funzione \mathcal{L} -trasformabile e continua $F : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{C}$ tale che

1. $\lambda_F \leq \lambda$ ed inoltre, per ogni $s \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} s > \lambda$, $f(s) = \mathcal{L}(F)(s)$.
2. Per ogni $a \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} a > \lambda$ e per ogni $t \geq 0$,

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i} (v.p.) \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \mathcal{L}(F)(s) e^{st} ds.$$

Osserviamo che una funzione razionale

$$f(s) := \frac{P(s)}{Q(s)}$$

con P e Q polinomi tali che $\deg P < \deg Q$ verifica le condizioni previste nel teorema precedente e quindi è una trasformata di Laplace, la cui trasformata inversa F può essere determinata decomponendo f in una somma di fratti semplici (cioè, con denominatori potenze di polinomi di grado 1).

In particolare, se Q ha solamente zeri del primo ordine z_1, \dots, z_m , vale la seguente *formula di Heaviside*:

$$F(t) = \sum_{k=1}^m \frac{P(z_k)}{Q'(z_k)} e^{z_k t}, \quad t \geq 0.$$

8.3 Applicazioni alla risoluzione di problemi differenziali

Come prima applicazione si consideri un problema di Cauchy relativo ad un'equazione lineare di ordine n a coefficienti costanti

$$\begin{cases} Y^{(n)} + a_{n-1}Y^{(n-1)} + \dots + a_1Y' + a_0Y = F(t) \\ Y(0) = y_0, \\ \dots \\ Y^{(n-1)}(0) = y_{n-1} \end{cases}$$

Posto $y = \mathcal{L}(Y)$ ed $f = \mathcal{L}(F)$ e supponendo che sia Y che le sue derivate sino all'ordine $n - 1$ siano localmente assolutamente continue, si può applicare il Teorema 8.1.2 e si ottiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(Y')(s) &= s\mathcal{L}(Y)(s) - Y(0) = sy(s) - y_0 \\ \mathcal{L}(Y'')(s) &= s\mathcal{L}(Y')(s) - Y'(0) = s^2y(s) - sy_0 - y_1 \\ &\vdots \\ \mathcal{L}(Y^{(n)})(s) &= s\mathcal{L}(Y^{(n-1)})(s) - Y^{(n-1)}(0) \\ &= s^ny(s) - s^{n-1}y_0 - s^{n-2}y_1 - \dots - sy_{n-2} - y_{n-1}. \end{aligned}$$

Sostituendo nell'equazione differenziale, si ottiene un'equazione algebrica del tipo

$$P(s)y + Q(s) = f(s)$$

dove $Q(s)$ è un polinomio di grado $n - 1$ che dipende dai coefficienti dell'equazione e dalle condizioni iniziali e $P(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0$ è il polinomio caratteristico dell'equazione differenziale. Si ottiene quindi

$$y(s) = \frac{f(s) - Q(s)}{P(s)}$$

ed applicando la formula di inversione

$$Y(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{f(s) - Q(s)}{P(s)} e^{st} ds.$$

Solitamente la soluzione $Y(t)$ si ottiene da $y(s)$ tenendo conto delle regole algebriche e analitiche di trasformazione e delle trasformate delle funzioni elementari.

8.4 Esempi ed applicazioni

Al fine di considerare funzioni con supporto in $[0, +\infty[$, utilizziamo la funzione di Heaviside H definita in (8.1.4).

Esempio 8.4.1 La trasformata di Laplace della funzione di Heaviside ha ascissa di convergenza assoluta $\lambda_H = 0$ e, per ogni $\operatorname{Re} s > 0$, risulta

$$\mathcal{L}(H)(s) = \frac{1}{s}.$$

Infatti, $e^{-\lambda t}$ è sommabile in $[0, +\infty[$ se e solo se $\lambda > 0$; inoltre, se $s \in \mathbb{C}$ e $\operatorname{Re} s > 0$, si ha

$$\mathcal{L}(H)(s) = \int_0^{+\infty} H(t) e^{-st} dt = \lim_{R \rightarrow +\infty} \left[\frac{e^{-st}}{-s} \right]_0^R = \frac{1}{s}.$$

Esempio 8.4.2 Dall'esempio precedente ed applicando le regole generali di trasformazione, si ricavano facilmente le seguenti trasformate di Laplace.

Per ogni $a > 0$, la funzione $F(t) := H(t - a)$ è \mathcal{L} -trasformabile e si ha $\lambda_F = 0$ e, per ogni $\operatorname{Re} s > 0$,

$$\mathcal{L}(F)(s) = \frac{e^{-as}}{s}.$$

Inoltre, per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$, la funzione $G(t) := e^{\alpha t} H(t)$ è anch'essa \mathcal{L} -trasformabile, $\lambda_G = \operatorname{Re} \alpha$ e si ha, per ogni $s \in \mathbb{C}$ con $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} \alpha$,

$$\mathcal{L}(G)(s) = \mathcal{L}(H)(s - \alpha) = \frac{1}{s - \alpha}.$$

Le trasformate precedenti possono essere facilmente ricavate direttamente dalla definizione.

Esempio 8.4.3 Sia $\omega > 0$ e si considerino le funzioni $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definite ponendo, per ogni $t \in \mathbb{R}$,

$$F(t) := H(t) \cos(\omega t), \quad G(t) := H(t) \sin(\omega t).$$

Poiché $F(t) = H(t)(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})/2$ e analogamente $G(t) = H(t)(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})/(2i)$, utilizzando la linearità della trasformazione di Laplace e le regole di trasformazione si ottiene allora che F e G sono \mathcal{L} -trasformabili e, per ogni $\operatorname{Re} s > 0$ ($= \operatorname{Re}(i\omega)$), si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(F)(s) &= \frac{1}{2}(\mathcal{L}(H(t) e^{i\omega t})(s) + \mathcal{L}(H(t) e^{-i\omega t})(s)) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s - i\omega} + \frac{1}{s + i\omega} \right) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}, \end{aligned}$$

e analogamente

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(G)(s) &= \frac{1}{2i}(\mathcal{L}(H(t) e^{i\omega t})(s) - \mathcal{L}(H(t) e^{-i\omega t})(s)) \\ &= \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{s - i\omega} - \frac{1}{s + i\omega} \right) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}. \end{aligned}$$

Esempio 8.4.4 Sia $k \in \mathbb{N}$ e si consideri la funzione

$$F(t) := t^k H(t).$$

Utilizzando il fatto che la trasformata di Laplace della funzione di Heaviside è olomorfa e, per ogni $k \in \mathbb{N}$ per la proprietà (8.1.2) si ha

$$\mathcal{L}(H)^{(k)}(s) = (-1)^k \mathcal{L}(t^k H(t))(s), \quad \operatorname{Re} s > 0,$$

si ottiene direttamente che la funzione F è \mathcal{L} -trasformabile ed inoltre, per ogni $\operatorname{Re} s > 0$,

$$\mathcal{L}(F)(s) = (-1)^k \mathcal{L}(H)^{(k)}(s) = (-1)^k D^{(k)} \left(\frac{1}{s} \right) = (-1)^k (-1)^k \frac{k!}{s^{k+1}} = \frac{k!}{s^{k+1}}$$

(la penultima uguaglianza si riconosce facilmente procedendo per induzione su $k \in \mathbb{N}$).

Esempio 8.4.5 (Trasformata di una funzione periodica).

Sia $T > 0$ e sia F una funzione tale che $F(t+T) = F(t)$ per ogni $t > 0$. Supponiamo inoltre che $F \in L^1(0, T)$. Allora F è \mathcal{L} -trasformabile con $\lambda_F = 0$. Posto

$$f_0(s) = \int_0^T F(t) e^{-st} dt,$$

risulta

$$\mathcal{L}(F)(s) = \frac{f_0(s)}{1 - e^{-Ts}} \quad (\operatorname{Re} s > 0).$$

Infatti si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(F)(s) &= \int_0^{+\infty} F(t) e^{-st} dt = \sum_{h=0}^{+\infty} \int_{hT}^{(h+1)T} F(t) e^{-st} dt \\ &= \sum_{h=0}^{+\infty} \int_0^T F(\tau + hT) e^{-s(\tau+hT)} d\tau = \sum_{h=0}^{+\infty} \int_0^T e^{-sTh} F(\tau) e^{-s\tau} d\tau \\ &= \left(\sum_{h=0}^{+\infty} (e^{-Ts})^h \right) \int_0^T F(\tau) e^{-s\tau} d\tau = \frac{f_0(s)}{1 - e^{-Ts}}. \end{aligned}$$

Esempio 8.4.6 Mostriamo ora con un esempio esplicito come si può utilizzare la Trasformata di Laplace per risolvere un Problema di Cauchy. Consideriamo il problema:

$$\begin{cases} Y''(t) - 3Y'(t) + 2Y(t) = F(t) & t \geq 0 \\ Y(0) = 1, \quad Y'(0) = 2, \end{cases}$$

dove la funzione F vale $F(t) = t$ per $0 \leq t \leq 1$, e vale $F(t) = 1$ per $t > 1$. Osserviamo che la funzione F si può scrivere come $F(t) = tH(t) - (t-1)H(t-1)$ e dunque la sua

trasformata è $\frac{1}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s^2}$. Trasformando l'equazione, tenendo presente il Teorema 8.1.2 e usando la regola sulla traslazione, otteniamo:

$$s^2 y(s) - s - 2 - 3(sy(s) - 1) + 2y(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s^2}.$$

Mettendo in evidenza $y(s)$ e portando gli altri termini al secondo membro si ha:

$$(s^2 - 3s + 2)y(s) = s - 1 + \frac{1}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s^2}.$$

ossia

$$y(s) = \frac{s^3 - s^2 + 1 - e^{-s}}{s^2(s^2 - 3s + 2)} = \frac{s^3 - s^2 + 1 - e^{-s}}{s^2(s-1)(s-2)}.$$

Usando il metodo dei fratti semplici otteniamo:

$$\begin{aligned} \frac{s^3 - s^2 + 1}{s^2(s-1)(s-2)} &= \frac{5}{4(s-2)} - \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2s^2} + \frac{3}{4s} \\ \frac{-e^{-s}}{s^2(s-1)(s-2)} &= -e^{-s} \left(\frac{1}{4(s-2)} - \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2s^2} + \frac{3}{4s} \right). \end{aligned}$$

Antitrasformando e usando ancora le regole sulla traslazione e sulla modulazione, si ha:

$$Y(t) = \left(\frac{5}{4} e^{2t} - e^t + \frac{1}{2}t + \frac{3}{4} \right) H(t) - \left(\frac{1}{4} e^{2(t-1)} - e^{(t-1)} + \frac{1}{2}(t-1) + \frac{3}{4} \right) H(t-1).$$

APPENDICE

Trasformata di Fourier $(n = 1)$

Definizione: $\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ix\xi} dx$.

$\frac{1}{a^2 + x^2}$	$\frac{\pi e^{- a\xi }}{ a }$
$e^{-ax^2} \ (a > 0)$	$\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\xi^2/(4a)}$
$e^{-a x } \ (a > 0)$	$\frac{2a}{a^2 + \xi^2}$
$f(x - a)$	$e^{-ia\xi} \hat{f}(\xi)$
$e^{iax} f(x)$	$\hat{f}(\xi - a)$
$f(ax)$	$\frac{1}{ a } \hat{f}\left(\frac{\xi}{a}\right)$
$xf(x)$	$i(\hat{f})'(\xi)$
$f'(x)$	$i\xi \hat{f}(\xi)$
$(f * g)(x)$	$\hat{f}(\xi) \cdot \hat{g}(\xi)$
$(f \cdot g)(x)$	$\frac{1}{2\pi} (\hat{f}(\xi) * \hat{g}(\xi))$

Tabella – A.1: Trasformate di Fourier

Trasformata di Laplace

Definizione: $f(s) = \int_0^{+\infty} F(t) e^{-st} dt$.

$H(t)$	$\frac{1}{s} \quad (\operatorname{Re} s > 0)$
$H(t) \cos(\omega t) \quad (\omega > 0)$	$\frac{s}{\omega^2 + s^2} \quad (\operatorname{Re} s > 0)$
$H(t) \sin(\omega t) \quad (\omega > 0)$	$\frac{\omega}{\omega^2 + s^2} \quad (\operatorname{Re} s > 0)$
$t^k H(t)$	$\frac{k!}{s^{k+1}} \quad (\operatorname{Re} s > 0)$
$F(at) \quad (a > 0)$	$\frac{1}{a} f\left(\frac{s}{a}\right) \quad (\operatorname{Re} s > a\lambda_F)$
$F(t - a) \quad (a > 0)$	$e^{-as} f(s) \quad (\operatorname{Re} s > \lambda_F)$
$e^{\alpha t} F(t)$	$f(s - \alpha) \quad (\operatorname{Re} s > \lambda_F + \operatorname{Re} \alpha)$
$F'(t)$	$s f(s) - F(0) \quad (\operatorname{Re} s > \lambda_F)$
$\int_0^t F(\tau) d\tau$	$\frac{1}{s} f(s) \quad (\operatorname{Re} s > \max\{0, \lambda_F\})$
$\frac{F(t)}{t}$	$\int_{\operatorname{Re} s + i \operatorname{Im} s}^{+\infty + i \operatorname{Im} s} f(\sigma) d\sigma \quad (\operatorname{Re} s > \max\{0, \lambda_F\})$
$(F * G)(t)$	$f(s) \cdot g(s) \quad (\operatorname{Re} s > \max\{\lambda_F, \lambda_G\})$

Tabella – A.2: Trasformate di Laplace

BIBLIOGRAFIA

- [1] G.C.BAROZZI: Matematica per l'Ingegneria dell'Informazione, Zanichelli, Bologna, 2005.
- [2] M.BRAMANTI, C.D.PAGANI E S.SALSA: Analisi Matematica Due, Zanichelli, Bologna, 2009.
- [3] M.CAMPITI: Matematica Applicata, dispense all'indirizzo
<http://michelecampiti.unile.it/didattica/materiale/matappl.pdf>
- [4] M.CODEGONE: Metodi Matematici per l'Ingegneria, Zanichelli, Bologna, 1995.
- [5] N.FUSCO, P.MARCELLINI, C.SBORDONE: Analisi Matematica due, Liguori Editore, Napoli, 1996.
- [6] G.GILARDI: Analisi Tre, McGraw-Hill, Milano, 1994.
- [7] E.GIUSTI: Analisi Matematica 2, Bollati Boringhieri, Torino, 1989.
- [8] E.GIUSTI: Esercizi e complementi di Analisi Matematica, vol. 2, Bollati Boringhieri, Torino, 1989.
- [9] P.MARCELLINI, C.SBORDONE: Esercitazioni di Matematica 2, parte I e II, Liguori Editore, Napoli, 1991.
- [10] M.MIRANDA JR.: Eserciziario del corso di Matematica Applicata, all'indirizzo
<http://poincare.unile.it/miranda/MatematicaApplicata/Esercizi.pdf>
- [11] M.MIRANDA JR., F.PARONETTO: Eserciziario del corso di Matematica II, all'indirizzo
<http://poincare.unile.it/miranda/MatematicaII/Esercizi2.pdf>
- [12] F.TOMARELLI: Esercizi di Metodi Matematici per l'Ingegneria, CLUP, Milano, 1987.